Claudio Bernardi | Lodovico Cateni | Roberto Fortini
Silvio Maracchia | Giovanni Olivieri | Ferruccio Rohr

IL PENSIERO MATEMATICO

VOLUME 1

ALGEBRA
STATISTICA
GEOMETRIA

LIBRO PIÙ WEB
www.libropiuweb.it

@pprendiscienza

LE MONNIER SCUOLA

IL PENSIERO MATEMATICO
Indice

ALGEBRA

UNITÀ A 1
NUMERI NATURALI E NUMERI INTERI

1. Numeri naturali A 2
2. Operazioni con i numeri naturali A 4
3. Numeri primi e divisibilità A 7
4. Scomposizione in fattori primi A 8
5. Massimo comun divisore A 10
6. Minimo comune multiplo A 12
7. Numeri interi A 13
8. Addizione e sottrazione di numeri interi A 16
9. Moltiplicazione, divisione e potenze di numeri interi A 19
10. Sistemi di numerazione A 22
11. Passaggi di base A 24

Sintesi A 28
Esercizi di paragrafo A 32
Esercizi di fine unità A 57
Test! A 64
Stimoliamo la mente A 66
Esercizi di recupero A 67
Matematica e Modelli A 70

UNITÀ A 2
NUMERI RAZIONALI E NUMERI REALI

1. Frazioni A 72
2. Frazioni e decimali A 74
3. Frazioni e percentuali A 77
4. Numeri razionali A 80
5. Confronto di frazioni A 82
6. Addizione e sottrazione di frazioni A 84
7. Moltiplicazione e divisione di frazioni A 85
8. Elevamento a potenza A 86
9. Espressioni numeriche A 88
10. Numeri reali A 90
11. Proprietà delle operazioni A 93
12. Uguaglianze e disuguaglianze A 94
13. Valore assoluto A 96

Laboratorio
Primi passi con GeoGebra A 98
Nella storia A 100
Sintesi A 103
Esercizi di paragrafo A 106
Esercizi di fine unità A 142
Test! A 149
Stimoliamo la mente A 151
Esercizi di recupero A 152
Verso le prove Invalsi A 154
Matematica e Modelli A 156

UNITÀ A 3
INSIEMI E LOGICA

1. Insiemi e loro proprietà A 158
2. Sottoinsiemi A 160
3. Operazioni con gli insiemi A 161
4. Insieme complementare A 163
5. Insieme delle parti A 165
6. Prodotto cartesiano A 166
7. Proposizioni e connettivi A 168
8. Predicati e quantificatori A 173

Sintesi A 175
Esercizi di paragrafo A 177
Esercizi di fine unità A 199
Test! A 201
Stimoliamo la mente A 203
Esercizi di recupero A 204
Matematica e Modelli A 206

Il pensiero matematico

UNITÀ A 4

RELAZIONI E FUNZIONI

1. Relazioni binarie A 208
2. Proprietà delle relazioni A 210
3. Relazioni d'ordine A 212
4. Relazioni di equivalenza A 214
5. Corrispondenze A 216
6. Funzioni A 217
7. Funzioni numeriche A 220
8. Funzioni inverse A 224
9. Proporzionalità diretta e inversa A 225
10. Particolari funzioni numeriche A 227

Laboratorio *Grafico di una funzione* A 229
Nella storia A 231
Sintesi A 234
Esercizi di paragrafo A 237
Esercizi di fine unità A 269
Test! A 273
Stimoliamo la mente A 275
Esercizi di recupero A 276
Verso le prove Invalsi A 278
Matematica e Modelli A 280

UNITÀ A 5

MONOMI E POLINOMI

1. Espressioni algebriche A 282
2. Monomi A 283
3. Addizione e sottrazione di monomi A 285
4. Moltiplicazione e divisione di monomi A 287
5. Potenze di monomi A 289
6. Espressioni con i monomi A 290
7. MCD e mcm di monomi A 291
8. Polinomi A 293
9. Addizione e sottrazione di polinomi A 296
10. Moltiplicazione e potenze di polinomi A 297
11. Prodotti notevoli A 299
12. Divisione di un polinomio per un monomio A 302
13. Divisione di due polinomi A 303
14. Regola del resto e teorema di Ruffini A 305
15. Regola di Ruffini A 306
16. Casi di divisibilità di $x^n \pm a^n$ per $x \pm a$ A 308

Sintesi A 310
Esercizi di paragrafo A 315
Esercizi di fine unità A 369
Test! A 373
Stimoliamo la mente A 375
Esercizi di recupero A 376
Matematica e Modelli A 378

UNITÀ A 6

FATTORIZZAZIONE DI POLINOMI E FRAZIONI ALGEBRICHE

1. Moltiplicare e fattorizzare polinomi A 380
2. Metodi di fattorizzazione A 381
3. MCD e mcm di polinomi A 389
4. Frazioni algebriche A 390
5. Semplificazione di frazioni algebriche A 393
6. A ddizione e sottrazione di frazioni algebriche A 395
7. Moltiplicazione e divisione di frazioni algebriche A 397
8. Elevamento a potenza di frazioni algebriche A 399
9. Espressioni letterali fratte A 400

Laboratorio *I polinomi* A 401
Nella storia A 403

Sintesi A 404
Esercizi di paragrafo A 407
Esercizi di fine unità A 455
Test! A 459
Stimoliamo la mente A 461
Esercizi di recupero A 462
Verso le prove Invalsi A 466
Matematica e Modelli A 468

UNITÀ A 7
EQUAZIONI LINEARI

1. Equazioni e identità A 470
2. Insieme delle soluzioni di un'equazione A 472
3. Equazioni equivalenti A 473
4. Principi di equivalenza A 474
5. Forma normale di un'equazione A 478
6. Risoluzione di un'equazione numerica intera di primo grado A 479
7. Equazioni fratte A 480
8. Risoluzione di un'equazione letterale A 483
9. Equazioni e problemi A 485

Sintesi A 489
Esercizi di paragrafo A 491
Esercizi di fine unità A 542
Test! A 546
Stimoliamo la mente A 548
Esercizi di recupero A 549
Matematica e Modelli A 554

UNITÀ A 8
DISEQUAZIONI LINEARI

1. Che cos'è una disequazione A 556
2. Disequazioni equivalenti A 558
3. Disequazioni intere A 560
4. Intervalli di numeri reali A 562
5. Sistemi di disequazioni A 563
6. Disequazioni fratte A 565
7. Equazioni e disequazioni con valore assoluto A 568
8. Disequazioni e problemi A 572

Laboratorio
Disequazioni lineari A 574
Nella storia A 577
Sintesi A 579
Esercizi di paragrafo A 581
Esercizi di fine unità A 610
Test! A 614
Stimoliamo la mente A 616
Esercizi di recupero A 617
Verso le prove Invalsi A 619
Matematica e Modelli A 620

UNITÀ A 9
STATISTICA

1. Popolazioni, caratteri e frequenze A 622
2. Rappresentazioni statistiche A 624
3. Indicatori di una distribuzione A 627
4. Indici di variabilità A 630

Nella storia A 634
Sintesi A 635
Esercizi di paragrafo A 636
Esercizi di fine unità A 650
Test! A 651
Stimoliamo la mente A 653
Esercizi di recupero A 654
Verso le prove Invalsi A 655
Matematica e Modelli A 656

GEOMETRIA

UNITÀ G 0

CHE COSA SAI DI GEOMETRIA

1. Rette angoli e poligoni G 2
2. Movimenti rigidi e figure uguali G 3
3. Bisettrice, angoli retti e rette perpendicolari G 5
4. Gli strumenti del disegno geometrico: riga e compasso G 6
5. Misure G 7
6. Angoli dei triangoli G 8
7. Aree dei poligoni e del cerchio G 9
8. Vettori G 10
9. Intersezione e unione di figure G 11

Esercizi di paragrafo G 12
Esercizi di fine unità G 17
Verso le prove Invalsi G 18
Matematica e Modelli G 20

UNITÀ G 1

LA GEOMETRIA COME TEORIA MATEMATICA

1. Geometria intuitiva e geometria razionale G 22
2. Definizioni e concetti primitivi G 23
3. Teoremi e assiomi G 24
4. Punti e rette G 27
5. Parti della retta e poligonali G 30
6. Confronto e somma di segmenti G 32
7. Parti del piano G 33
8. Confronto e operazioni fra angoli G 36

Sintesi G 39
Esercizi di paragrafo G 42
Esercizi di fine unità G 50
Test! G 53
Stimoliamo la mente G 54
Esercizi di recupero G 55
Matematica e Modelli G 58

UNITÀ G 2

TRIANGOLI E RETTE PERPENDICOLARI

1. Triangoli G 60
2. Primo criterio di uguaglianza dei triangoli G 61
3. Primo teorema sui triangoli isosceli G 62
4. Secondo criterio di uguaglianza dei triangoli G 63
5. Terzo criterio di uguaglianza dei triangoli G 65
6. Angoli esterni di un triangolo G 66
7. Bisettrice di un angolo G 67
8. Rette perpendicolari e angoli retti G 68
9. Mediane, altezze e bisettrici di un triangolo G 70

Laboratorio
I triangoli G 72
Sintesi G 74
Esercizi di paragrafo G 76
Esercizi di fine unità G 84
Test! G 86
Stimoliamo la mente G 87
Esercizi di recupero G 88
Verso le prove Invalsi G 89
Matematica e Modelli G 90

UNITÀ G 3

RETTE PARALLELE, TRIANGOLI E POLIGONI

1. Dimostrazioni per assurdo G 92
2. Rette parallele G 92
3. Parallelismo di rette tagliate da una trasversale G 95
4. Somma degli angoli interni di un triangolo G 98
5. Disuguaglianza triangolare G 99
6. Ancora sui triangoli G 100
7. Proiezioni e distanze G 103
8. Luoghi geometrici G 104
9. Poligoni G 106

Laboratorio *Rette parallele* G 110
Nella storia G 112
Sintesi G 118
Esercizi di paragrafo G 121
Esercizi di fine unità G 129
Test! G 132
Stimoliamo la mente G 133
Esercizi di recupero G 134
Matematica e Modelli G 136

UNITÀ G 4

SIMMETRIE

1. Simmetria rispetto a una retta G 138
2. Simmetria rispetto a un punto G 140
3. Figure simmetriche G 143

Laboratorio *Simmetrie* G 146
Sintesi G 148
Esercizi di paragrafo G 150
Esercizi di fine unità G 155
Test! G 158
Stimoliamo la mente G 159
Esercizi di recupero G 160
Matematica e Modelli G 162

UNITÀ G 5

PARALLELOGRAMMI E TRAPEZI

1. Parallelogrammi G 164
2. Parallelogrammi particolari G 168
3. Trapezi G 170

Laboratorio *Parallelogrammi al computer* G 174
Nella storia G 176
Sintesi G 180
Esercizi di paragrafo G 182
Esercizi di fine unità G 187
Test! G 190
Stimoliamo la mente G 191
Esercizi di recupero G 192
Verso le prove Invalsi G 193
Matematica e Modelli G 194

UNITÀ G 6

CIRCONFERENZA E CERCHIO

1. Definizioni e proprietà G 196
2. Parti della circonferenza e del cerchio G 199
3. Posizioni relative di circonferenza e retta G 200
4. Posizioni relative di due circonferenze G 202
5. Angoli al centro e alla circonferenza G 203
6. Tangenti a una circonferenza G 207

Sintesi G 209
Esercizi di paragrafo G 211
Esercizi di fine unità G 220

Test! G 223
Stimoliamo la mente G 224
Esercizi di recupero G 225
Matematica e Modelli G 226

UNITÀ G 7

POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

1. Punti notevoli di un triangolo G 228
2. Quadrilateri inscritti o circoscritti G 232
3. Poligoni regolari G 233
4. Costruzioni con riga e compasso G 236

Nella storia G 238
Sintesi G 240
Esercizi di paragrafo G 242
Esercizi di fine unità G 249
Test! G 251
Stimoliamo la mente G 252
Esercizi di recupero G 253
Verso le prove Invalsi G 255
Matematica e Modelli G 256

Soluzioni Test! Algebra e Statistica XVII
Soluzioni Test! Geometria XVIII
Indice analitico XIX
Indice dei comandi di *GeoGebra* XXXI

CONTENUTI MULTIMEDIALI

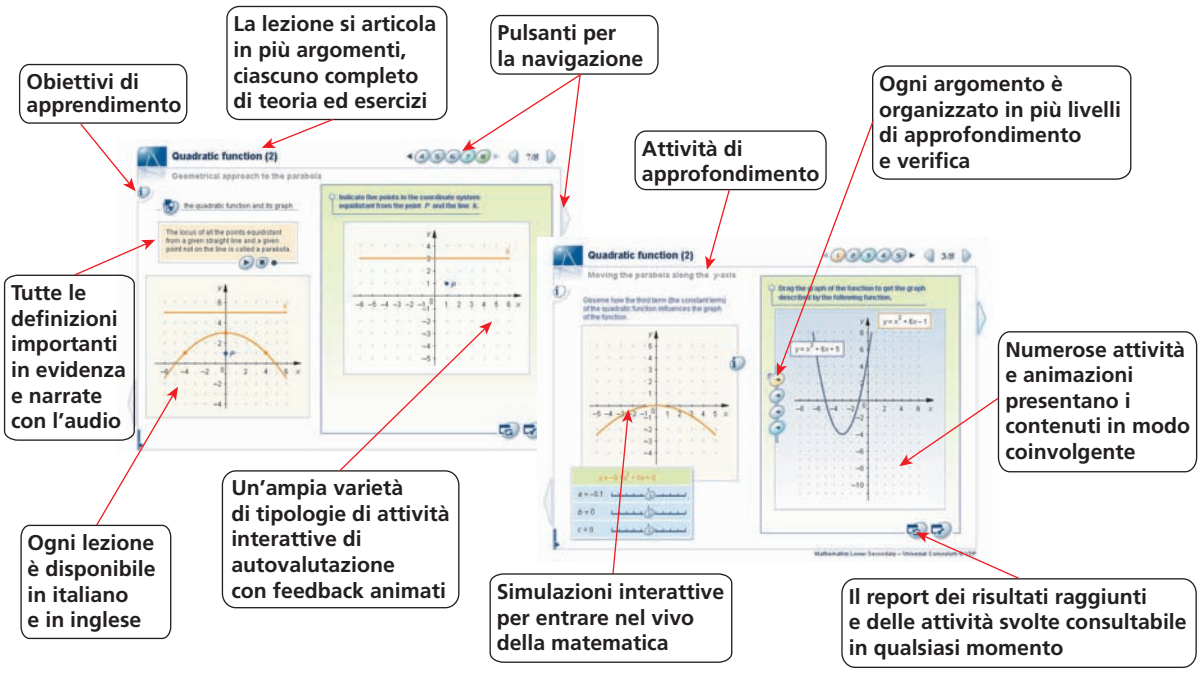
- lezioni interattive in italiano e in inglese
- simulazioni di geometria e attività con *GeoGebra*
- Learning Object interattivi per il recupero
- test interattivi
- attività di informatica
- approfondimenti
- letture di storia della matematica
- suggerimenti per ricerche on line

www.libropiuweb.it

@pprendiscienza

Nella Classe Virtuale sono presenti 13 lezioni multimediali interattive di @pprendiscienza, in italiano e in inglese, con centinaia di animazioni, video, attività e simulazioni.
Un'interfaccia intuitiva e un'organica integrazione dei contenuti con attività di valutazione, facilitano lo studio e motivano lo studente con l'aggiornamento continuo dei risultati raggiunti.
Ogni lezione è composta da oggetti dinamici che tracciano le attività degli studenti e adattano i contenuti alle loro conoscenze e ai progressi raggiunti per un percorso di apprendimento veramente personalizzato. Infatti, le lezioni sono estremamente interattive con report e feedback, che motivano ogni risposta e forniscono, a seconda dei risultati, attività di recupero o approfondimento.
Inoltre, costantemente a disposizione, lo studente trova strumenti di consultazione quali glossario, biografie, una calcolatrice scientifica e uno spazio per appunti.
Di seguito l'elenco delle lezioni proposte, in italiano e in inglese.

LEZIONI DISPONIBILI ANCHE IN INGLESE	
1. Funzioni e grafici	**8.** Disuguaglianze (1)
2. Analizzare e comparare i dati	**9.** Equazioni lineari e loro risoluzione
3. Espressioni algebriche	**10.** Funzioni quadratiche (2)
4. Equazione della linea	**11.** Risolvere problemi con funzioni quadratiche (1)
5. Equazione della circonferenza	**12.** Risolvere simultaneamente equazioni lineari (1)
6. Grafici delle funzioni trigonometriche	**13.** Eventi indipendenti (1)
7. Numeri irrazionali	



UNITÀ A 1

NUMERI NATURALI E NUMERI INTERI

Attività fisica... senza rinunce!

Giulia fa jogging ogni 6 giorni e ogni 15 giorni segue un corso di difesa personale.
Se il giorno in cui fa jogging e il giorno del corso coincidono, Giulia deve rinunciare alla corsa.
Oggi è andata al corso di autodifesa e ha dovuto saltare la corsa.
Tra quanti giorni le ricapiterà per la prima volta la stessa cosa?

E se...

Giulia volesse cambiare la frequenza con cui va a fare jogging in modo che i giorni in cui vi deve rinunciare alla corsa siano più rari, come potrebbe fare?

[soluzione nel paragrafo 6]

1. Numeri naturali

12, 5, 39, 0 are all **natural numbers**.

I primi numeri che l'umanità ha utilizzato per *contare* e *ordinare* oggetti sono i **numeri naturali**. Tutti noi *conosciamo questi numeri* fin dall'infanzia, per il loro carattere intuitivo e di immediata comprensione. I **numeri naturali** sono rappresentati con scritture quali 12, 5, 39, 0, 1237, ... e per scriverli usiamo **dieci simboli** detti **cifre**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Attenzione a non confondere i *numeri* con le cifre: 28 è un numero di *due* cifre, 572 è un numero di *tre* cifre, 5 è un numero formato da *una* sola cifra.

L'insieme dei **numeri naturali** viene generalmente indicato con $\mathbb{N}$.

L'insieme $\mathbb{N}$ ha molte proprietà, tra cui:

- esiste un numero naturale più piccolo di tutti gli altri, lo zero, che si indica con il simbolo "0";
- ogni numero naturale n è seguito immediatamente da un altro numero naturale che viene detto il *successivo* di n.

Ad eccezione del numero 0, ogni numero naturale è successivo di un altro numero naturale, che si chiama *precedente*.

I numeri naturali possono assumere due significati:
- **cardinale**, quando indicano una quantità (3 corridori);
- **ordinale**, quando indicano il posto occupato in un elenco (il 3° classificato).

ESEMPIO

Il successivo di 12 è 13, il successivo di 179 è 180 e il successivo di 1 099 è 1 100. Il precedente di 35 è 34, il precedente di 1 000 è 999.

Il passaggio al successivo di un generico numero naturale n è sempre possibile. Pertanto l'insieme $\mathbb{N}$ è un **insieme infinito**.

Rappresentazione e ordinamento dei numeri naturali

I numeri naturali possono essere rappresentati graficamente come punti su una retta in questo modo:

- fissiamo su una retta un verso di percorrenza;
- scegliamo a piacere un punto O sulla retta e a questo punto associamo il numero 0,
- scegliamo a piacere un punto U sulla retta e a questo punto associamo il numero 1.

Fissare il segmento OU equivale a fissare una unità di misura, ovvero la lunghezza del passo che permette di passare da un numero al suo successivo.

ESEMPIO

Per rappresentare il numero 2, basta fissare sulla retta un punto V in modo che il segmento UV sia congruente al segmento OU. Il numero 3 è rappresentato dal punto W per cui il segmento VW è congruento al segmento UV e quindi al segmento OU.

Grazie a questa rappresentazione diventa molto semplice stabilire quando due numeri naturali sono uguali o diversi, oppure quando il primo è maggiore o minore del secondo.

Infatti, due diversi numeri naturali occupano posti diversi sulla retta: uno dei due *precede* l'altro. Ad esempio, percorrendo la retta nel verso indicato, il numero 45 *precede* il numero 92, ma possiamo anche dire che il numero 92 *segue* il numero 45. Ciò vuol dire che 45 è "minore" di 92 o anche che 92 è "maggiore" di 45. Quando invece due numeri occupano la stessa posizione sulla retta, allora questi sono uguali.
Dalla rappresentazione sulla retta e dal fatto che ogni volta che abbiamo due numeri c'è sempre uno che precede l'altro, deduciamo che i numeri naturali risultano ordinati secondo grandezza:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 67,\ 68,\ \ldots\ 1973,\ 2010,\ \ldots$$

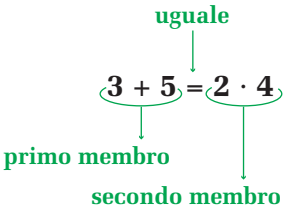
In generale, per esprimere *relazioni* tra numeri, o tra espressioni numeriche, facciamo uso di segni di uguaglianza e disuguaglianza come indicato dalla seguente tabella.

In alcuni casi si usano i simboli "$\leq$" (minore o uguale) e "$\geq$" (maggiore o uguale).
Ad esempio se abbiamo 100,00 € per fare la spesa, il costo totale T dei prodotti che acquistiamo deve essere minore o uguale della nostra disponibilità: $T \leq 100$.

SIMBOLO	NOME	ESEMPI		
$<$	minore	$12 < 23$	$31 + 6 < 40$	$20 + 15 < 18 + 21$
$=$	uguale	$7 + 90 = 97$	$12 + 5 = 40 - 23$	$100 = 50 - 5 + 55$
$>$	maggiore	$43 > 35$	$76 > 20 + 40$	$37 - 14 > 10 + 8$
$\neq$	diverso	$7 \neq 15$	$87 - 21 \neq 0$	$1 \neq 25 - 23$

DEFINIZIONE

Uguaglianza. Una scrittura formata da due espressioni numeriche separate dal segno "=" è detta **uguaglianza**.



In una uguaglianza, l'espressione che sta a sinistra del segno di uguale è detta **primo membro**, quella che sta a destra **secondo membro**.
Oltre ai numeri, una uguaglianza può contenere anche delle lettere.

ESEMPIO

L'uguaglianza $a + 3 = 5$, è vera se a vale 2, falsa altrimenti.

DEFINIZIONE

Disuguaglianza. Una scrittura formata da due espressioni numeriche separate da uno dei segni "$>$", "$<$", "$\geq$", "$\leq$", "$\neq$" è detta **disuguaglianza**.

$12 > 8$ e $8 < 12$ significano entrambe che nella successione dei numeri naturali 12 viene dopo 8.

Anche nelle disuguaglianze, in modo analogo alle uguaglianze, si distinguono un **primo membro**, cioè l'espressione a sinistra del simbolo, e un **secondo membro**, cioè l'espressione a destra.

ESEMPIO

Le disuguaglianze

$3 + 7 \neq 5$ $\qquad$ $7 + 9 > 14 + 1$
$12 + 0 < 13$ $\qquad$ $3 + 3 > 3 + 2$

sono vere.

2. Operazioni con i numeri naturali

Consideriamo le **operazioni** più comuni che si possono eseguire con i numeri naturali.

$$8 + 5 = 13$$

addendi — somma

- **Addizione**: si indica con il simbolo "+"; i numeri da addizionare sono detti **addendi** e il risultato dell'addizione è detto **somma**.

minuendo — differenza

$$8 - 5 = 3$$

sottraendo

- **Sottrazione**: si indica con il simbolo "−"; il numero da cui si sottrae si chiama **minuendo**, quello che si sottrae si chiama **sottraendo**; il risultato si chiama **differenza**.
  Eseguire la sottrazione $n - m$ vuol dire trovare il numero d che sommato a m dia n, cioè
  $$d = n - m \quad \text{se} \quad m + d = n.$$

prodotto

$$8 \cdot 5 = 40$$

fattori

- **Moltiplicazione**: si indica con il simbolo "×" o anche con il simbolo "·"; i numeri che si moltiplicano si chiamano **fattori**; il risultato si chiama **prodotto**. Eseguire la moltiplicazione di un numero naturale n per un numero m vuol dire sommare m volte il numero n
  $$n \cdot m = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ addendi}}.$$

dividendo — divisore

$$26 : 3$$

$$26 = 3 \cdot 8 + 2$$

quoziente — resto

- **Divisione con il resto**: si indica con il simbolo ":"; il numero da dividere si chiama **dividendo**, il numero per cui si divide si chiama **divisore**. Una divisione dà come risultato un **quoziente** e un **resto**.
  Eseguire la divisione $n : m$ vuol dire trovare un numero naturale q e un numero naturale $r < m$ tali che
  $$n = m \times q + r.$$
  Se il resto r è zero, allora si ha $n = m \times q$ e si scrive $n : m = q$.

esponente

$$2^2$$

base

- **Elevamento a potenza**: si indica con n^m; il numero n si chiama **base**, il numero m si chiama **esponente**.
  Elevare il numero n al numero m vuol dire eseguire la moltiplicazione
  $$n^m = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{m \text{ fattori}}.$$
  Ogni numero, diverso da 0, elevato a 0, dà come risultato 1:
  $$n^0 = 1.$$
  Non ha invece senso elevare 0 all'esponente 0.

La sottrazione e la divisione si dicono **operazioni inverse** dell'addizione e, rispettivamente, della moltiplicazione.

Proprietà delle operazioni

Le operazioni sui numeri naturali godono di alcune proprietà.

Per l'addizione valgono:

- **la proprietà commutativa:** $a + b = b + a$;
- **la proprietà associativa**: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

ESEMPIO

- $7+5=12$
  $5+7=12$ $\longrightarrow$ $7+5=5+7$
- $(\underline{3+2})+4=\underline{5}+4=9$
  $3+(\underline{2+4})=3+\underline{6}=9$ $\longrightarrow$ $(3+2)+4=3+(2+4)$

Queste proprietà sono vere anche per la moltiplicazione:

- **proprietà commutativa**: $a \cdot b = b \cdot a$
- **la proprietà associativa**: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

ESEMPIO

- $7 \cdot 5 = 35$
  $5 \cdot 7 = 35$ $\longrightarrow$ $7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$
- $(\underline{3 \cdot 2}) \cdot 4 = \underline{6} \cdot 4 = 24$
  $3 \cdot (\underline{2 \cdot 4}) = 3 \cdot \underline{8} = 24$ $\longrightarrow$ $(3 \cdot 2) \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 4)$

Inoltre per la moltiplicazione vale la

- **legge di annullamento del prodotto**: il prodotto di due numeri è uguale a zero se e solo se almeno uno dei due numeri è 0

$$a \cdot b = 0 \text{ se e solo se } a = 0 \text{ o } b = 0$$

Per la sottrazione vale la

- **proprietà invariantiva**: $a - b = (a + m) - (b + m)$
  $a - b = (a - m) - (b - m)$

ESEMPIO

- $225 - 75 = 150$
  $(225 + 25) - (75 + 25) =$ $\longrightarrow$ $225 - 75 = (225 + 25) - (75 + 25)$
  $= 250 - 100 = 150$

Per la divisione vale una proprietà analoga

- **proprietà invariantiva:** $a : b = (a \cdot m) : (b \cdot m)$ $(m, b \neq 0)$
  $a : b = (a : m) : (b : m)$ $(m, b \neq 0)$

ESEMPIO

- $150 : 30 = 5$
  $(150 : 10) : (30 : 10) = 15 : 3 = 5$ $\longrightarrow$ $150 : 30 = (150 : 10) : (30 : 10)$

Infine vale la **proprietà distributiva della moltiplicazione**

- **rispetto all'addizione**: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- **rispetto alla sottrazione**: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

e la **proprietà distributiva della divisione**

- **rispetto all'addizione**: $(a + b) : c = a : c + b : c$
- **rispetto alla sottrazione**: $(a - b) : c = a : c - b : c$

ESEMPIO

- $7 \cdot (\underline{3+2}) = 7 \cdot \underline{5} = 35$
  $\underline{7 \cdot 2} + \underline{7 \cdot 3} = \underline{14} + \underline{21} = 35$ $\longrightarrow$ $7 \cdot (3+2) = 7 \cdot 3 + 7 \cdot 2$
- $(\underline{24-16}) : 8 = \underline{8} : 8 = 1$
  $\underline{24:8} - \underline{16:8} = \underline{3} - \underline{2} = 1$ $\longrightarrow$ $(24-16) : 8 = 24 : 8 - 16 : 8)$

Per l'elevamento a potenza invece valgono le seguenti proprietà:

- **prodotto di potenze che hanno la stessa base**: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- **quoziente di potenze che hanno la stessa base**: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- **potenza di una potenza**: $(a^n)^m = a^{nm}$
- **prodotto di potenze che hanno lo stesso esponente**: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- **quoziente di potenze che hanno lo stesso esponente**: $a^n : b^n = (a : b)^n$

ESEMPIO

- $2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$
  $2^{3+4} = 2^7 = 128$ $\longrightarrow$ $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
- $3^4 : 3^2 = 81 : 9 = 9$
  $3^{4-2} = 3^2 = 9$ $\longrightarrow$ $3^4 : 3^2 = 3^2$
- $(4^2)^3 = 16^3 = 4\,096$
  $4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4\,096$ $\longrightarrow$ $(4^2)^3 = 4^6$

STRATEGIE

Come calcolare il valore delle espressioni aritmetiche

- Se in una espressione compaiono solo addizioni e sottrazioni, esegui le operazioni nell'ordine in cui si presentano.

  $\mathbf{12 - 5 + 6 = 7 + 6 = 13}$

- Se in una espressione compaiono solo moltiplicazioni e divisioni, esegui le operazioni nell'ordine in cui si presentano.

  $\mathbf{48 : 12 \times 2 = 4 \times 2 = 8}$

- Se in una espressione compaiono addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e potenze, esegui
  1. prima le potenze,
  2. poi le moltiplicazioni e le divisioni,
  3. infine le addizioni e le sottrazioni.

  $\mathbf{3 \times 2^2 - 15 : 5 + 1 - 10 =}$

  $\mathbf{3 \times 4 - 15 : 5 + 1 - 10 =}$

  $\mathbf{12 - 3 + 1 - 10 =}$

  $\mathbf{9 + 1 - 10 = 10 - 10 = 0}$

- Le operazioni collocate tra parentesi vengono eseguite prima di ogni altra operazione partendo dalle parentesi tonde e, a seguire, quelle quadre e infine quelle graffe.

ESEMPIO

$2^4 : 4 - 3^2 \times [(20-8) - 4 \times 3] + 21 \times [6 - (8+32) : 10] =$

$= 2^4 : 4 - 3^2 \times [16 - 4 \times 3] + 21 \times [6 - 40 : 10] =$ parentesi tonde

$= 2^4 : 4 - 3^2 \times [12 - 12] + 21 \times [6 - 4] =$ operazioni nelle parentesi quadre

$= 2^4 : 4 - 3^2 \times 0 + 21 \times 2 =$ parentesi quadre

$= 16 : 4 - 9 \times 0 + 21 \times 2 =$ potenze

$= 4 - 0 + 42 = 46$ ultime operazioni

3. Numeri primi e divisibilità

Sia n un numero naturale diverso da zero. Se lo moltiplichiamo successivamente per 1, 2, 3, 4, ... otteniamo:

$$n, \quad 2n, \quad 3n, \quad 4n, \quad \ldots$$

Ciascuno di tali numeri si dice **multiplo** di n e n si dice **divisore** di ognuno di essi.

I divisori di un numero naturale n si dicono anche sottomultipli di n.

DEFINIZIONE

Multiplo e divisore. Dati due numeri naturali m e n diversi da 0, se risulta
$m = n \times k$,
con k, numero naturale, allora diremo che
- m è multiplo di n
- n è divisore di m.

ESEMPIO

I multipli di 4 sono
$4 = 4 \times 1$, $8 = 4 \times 2$, $12 = 4 \times 3$, ...
D'altra parte 4 è un divisore di 4, 8 e 12.

Se m è un multiplo di n, si dice anche che m è divisibile per n.
Per definizione, dall'uguaglianza $28 = 4 \times 7$ possiamo dedurre che:
- 28 è multiplo di 4 e di 7, e 4 e 7 sono divisori di 28;
- 28 è divisibile per 4 e per 7.

multiplo di 4 e 7

$$28 = 4 \times 7$$

divisori di 28

Dati invece i numeri 7 e 15, poiché non esiste alcun numero naturale k tale che $15 = 7 \times k$, possiamo dire che 15 non è multiplo di 7 e 7 non è divisore di k.
Abbiamo visto che moltiplicando un numero naturale n per un numero naturale qualunque si ottiene un suo multiplo. Pertanto, essendo $\mathbb{N}$ un insieme infinito, ogni numero ha infiniti multipli.
I divisori di n, invece, sono in numero finito: essi infatti sono minori o uguali a n, quindi sono da scegliere tra 1, 2, 3, ..., n.
Ogni numero naturale n maggiore di 1 ha almeno due divisori distinti: il numero n stesso e 1.
Abbiamo quindi la seguente definizione:

I multipli di n sono maggiori o uguali a n, mentre i suoi divisori sono minori o uguali a n.

DEFINIZIONE

Numeri primi e numeri composti. I numeri naturali diversi da 0 e da 1 che hanno soltanto due divisori si dicono **primi**. I numeri non primi vengono detti **composti**.

A **prime number**, or just a **prime**, is a natural number bigger than 1 which has only two **divisors**.

ESEMPIO

- Gli unici numeri interi divisori di 3 sono 1 e 3. Quindi 3 è un numero primo.
- Il numero 10 non è primo perché $10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$, quindi ammette quattro divisori distinti 1, 2, 5 e 10.

Ecco i numeri primi minori di 100:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

4. Scomposizione in fattori primi

Dalla definizione di numero composto segue che, se un numero non è primo, lo si può sempre esprimere come un prodotto i cui fattori siano tutti numeri primi (o potenze di numeri primi).

Per scomporre un numero in fattori primi si possono seguire strategie diverse. È però importante notare che comunque, dato un numero n, la scomposizione che si trova è sempre la stessa!

REGOLA

Scomposizione in fattori primi. Ogni numero naturale n diverso da 0 e da 1 può essere scritto come prodotto di numeri primi. Questa scrittura è unica e prende il nome di **scomposizione in fattori primi** di n.

ESEMPIO

I numeri

$10 = 2 \times 5 \qquad 21 = 3 \times 7 \qquad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$

sono scomposti in fattori primi.

La procedura che consente di scomporre un numero naturale in un prodotto di fattori primi è molto semplice: si divide il numero per un suo divisore, poi il risultato per un divisore e così via fino a ottenere 1.
Riportiamo di seguito due diversi modi di scomporre il numero 280.

STRATEGIE

Come scomporre un numero in fattori primi

$280 : 2 = 140$	280	2
$140 : 2 = 70$	140	2
$70 : 2 = 35$	70	2
$35 : 5 = 7$	35	5
$7 : 7 = 1$	7	7
FINE	1	

$280 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$
$= 2^3 \times 5 \times 7$

$280 : 10 = 28$	280	10
$28 : 4 = 7$	28	4
$7 : 7 = 1$	7	7
FINE	1	

$280 = 10 \times 4 \times 7 =$
$= 2 \times 5 \times 2^2 \times 7 =$
$= 2^3 \times 5 \times 7$

Per scomporre un numero possiamo cercare i suoi divisori primi e dividere man mano per questi, oppure cercare i divisori, anche non primi, e poi scomporre questi ultimi. In ogni caso è utile ricordare alcuni criteri di divisibilità.

N. DIVISIBILE PER ...	SE E SOLO SE ...	ESEMPIO
2	termina con 0, 2, 4, 6, 8	16 è divisibile per 2 — 15 non è divisibile per 2
3	la somma delle sue cifre è multiplo di 3	2 547 è divisibile per 3 perché $2 + 5 + 4 + 7 = 18$ 1 516 non è divisibile per 3 perché $1 + 5 + 1 + 6 = 13$
4	è divisibile per 4 il numero formato dalle ultime 2 cifre	23 736 e divisibile per 4 perché 36 lo è 32 514 non è divisibile per 4 perché 14 non lo è
5	termina con 0 o 5	345 e 460 sono divisibili per 5 — 348 non lo è

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori primi il numero 5 460.
Il numero 5 460 è divisibile per 2 (perché finisce con 0), per 3 perché la somma delle cifre è uguale a 15 e per 5 perché finisce con 0, quindi è divisibile per 30.

$$\begin{array}{r|l} 5460 & 30 \\ 182 & 2 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow 5460 = 30 \times 2 \times 7 \times 13 =$$
$$= 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 13 =$$
$$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$

Se un numero è divisibile per due numeri che non hanno divisori comuni, allora è divisibile anche per il loro prodotto.

PER SAPERNE DI PIÙ

I numeri primi e la crittografia

La sicurezza e la privacy delle operazioni commerciali sul web e delle trasmissioni telematiche di informazioni dipende dai numeri primi. Per rendere sicure le trasmissioni di dati, le informazioni trasmesse vengono codificate, tradotte cioè in un linguaggio, o codice, che dovrebbe garantire l'impossibilità di decifrare il messaggio da parte di chi ne venga illegalmente in possesso. Tali codici si basano sulla scomposizione in fattori primi. Alla base delle procedure di codifica, ci sono infatti numeri ottenuti dal prodotto di due numeri primi. Chi vuole decifrare il messaggio deve scomporre tali numeri nel prodotto dei due fattori primi. La sicurezza risiede nel fatto che quando i numeri utilizzati sono molto grandi, la scomposizione, in tempi brevi, è quasi impossibile.
Consideriamo il numero $n = 221$ e supponiamo che per decifrare un messaggio sia necessario trovare due numeri primi p_1 e p_2 tali che $p_1 \times p_2 = 221$. Poiché è abbastanza semplice ricavare che $221 = 13 \times 17$, il messaggio viene decifrato e la privacy è violata. Se $n = 220565839754127454583481 07$, la violazione del messaggio appare più difficoltosa, ma lo è solo in apparenza, poiché un qualsiasi computer domestico di recente generazione è in grado di mostrare che $220565839754127454583481 07 = 30361544836013 \times 7264643987771$, dove i numeri 30361544836013 e 7264643987771 sono primi, impiegando, mediamente, non più di 30 secondi.
È dunque necessario trovare numeri n che siano scomponibili nel prodotto di due numeri primi e tali che anche un potente computer abbia difficoltà a scomporli, o almeno effettui la scomposizione in tempi assai lunghi, quando l'informazione ha perso il suo interesse.
Il progredire della tecnologia e dell'informatica rende i computer sempre più potenti e questo impegna i matematici a trovare numeri del tipo $p_1 \times p_2 = n$ sempre più grandi, ieri con centinaia, oggi con migliaia di cifre. Per scoprire numeri con tali caratteristiche è necessario quindi trovare numeri primi di migliaia di cifre e per questo le migliori menti matematiche sono al lavoro in tutto il mondo.

LAB

5. Massimo comune divisore

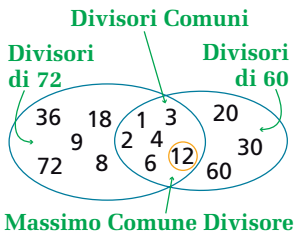
Un produttore di vino deve consegnare ogni settimana a due diverse mense aziendali rispettivamente 72 e 60 bottiglie di vino. Per contenere le spese di imballaggio, conviene utilizzare cassettine tutte contenenti lo stesso numero di bottiglie e usarne il minor numero possibile.
Allora ogni cassettina deve contenere un numero di bottiglie che sia divisore sia di 72 che di 60 e che sia il massimo possibile.
I divisori di 72 e 60 sono:

Divisori di 72 $= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 36, 72\}$

Divisori di 60 $= \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 20, 30, 60\}$.

Il più grande divisore comune è 12, quindi ogni cassettina deve contenere 12 bottiglie.

Il numero 12 è il Massimo Comun Divisore tra 60 e 72.



DEFINIZIONE

Massimo comune divisore. Si dice **massimo comune divisore** di due numeri naturali non nulli a e b, e si indica con la scrittura MCD(a, b), il maggiore dei divisori comuni ad a e b. Il massimo comune divisore di tre o più numeri è il maggiore dei divisori comuni a tutti.

ESEMPIO

Dati i numeri 300 e 315 si ha

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \quad 315 = 3^2 \times 5 \times 7$

Osserviamo che:

- il fattore 2 non è contenuto in 315,
- il fattore 7 non è contenuto in 300,
- entrambi i numeri sono divisibili per 3, ma non per 3^2,
- entrambi i numeri sono divisibili per 5, ma non per 5^2.

Il loro più grande divisore comune è quindi 3×5 e si ha

MCD(300, 315) $= 15$.

Se uno dei due numeri di cui calcoliamo il MCD è 0, poniamo il MCD uguale all'altro numero, cioè MCD$(n, 0) = n$.

STRATEGIE

Come calcolare il MCD

Per calcolare il MCD di due numeri:

1. scomponiamo in fattori primi i due numeri;
2. prendiamo tutti i fattori comuni, una sola volta e con l'esponente minore;
3. il MCD è il prodotto fra questi numeri.

$$\mathbf{MCD(60,18) = ?}$$

$$\mathbf{60 = \underline{2^2} \cdot \underline{3} \cdot 5 \qquad 18 = \underline{2} \cdot \underline{3^2}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\mathbf{3 \qquad\qquad 2}$$

$$\mathbf{MCD(60,18) = 3 \cdot 2 = 6}$$

Numeri primi fra loro

Poiché 1 è divisore di tutti i numeri, se due numeri hanno come divisore comune solo 1, allora il loro MCD è 1.

DEFINIZIONE

Numeri coprimi. Due o più numeri tali che il loro MCD è uguale a 1 si dicono **primi tra loro** o anche **coprimi**.

Attenzione a non confondere i numeri primi **tra loro** con i numeri **primi**. Ad esempio 9 e 10 sono primi tra loro, ma nessuno dei due è numero primo.

ESEMPIO

I numeri 8 e 15 sono coprimi, perché MCD(8, 15) = 1.

PER SAPERNE DI PIÙ

L'algoritmo di Euclide

Se i numeri di cui calcolare il MCD sono molto alti può non essere facile trovare la loro scomposizione in fattori primi. In questi casi può essere utile conoscere un metodo più rapido per calcolare il MCD di due numeri: l'algoritmo di Euclide, detto anche algoritmo delle divisioni successive.

Alla base dell'algoritmo c'è la seguente proprietà:
dati due numeri naturali a e b, con a > b, se un numero n divide sia a sia b, allora divide il resto della divisione di a per b.

Ad esempio, dati 310 e 105, dividendo il primo per il secondo si ottiene quoziente 2 e resto 100. Il numero 5 è divisore di entrambi i numeri e divide anche il resto 100.

Poiché la proprietà vale per qualunque divisore, vale anche per il massimo comune divisore di *a* e *b*, quindi il MCD tra due numeri è uguale al MCD tra il più piccolo e il resto della divisione tra il più grande e il più piccolo.
Con un esempio, vediamo come si applica l'algoritmo di Euclide: calcoliamo MCD (441,140).

NUMERO *A*	NUMERO *B*	QUOZIENTE DI *A* DIVISO *B*	RESTO DI *A* DIVISO *B*	
441	140	3	21	MCD(441, 140) = MCD(140, 21)
140	21	6	14	MCD(140, 21) = MCD(21, 14)
21	14	1	7	MCD(21, 14) = MCD(14, 7)
14	7	2	0	MCD(14, 7) = MCD(7, 0) = 7

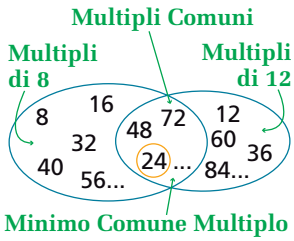
L'algoritmo termina poiché per ogni numero si ha MCD(n, 0) = n.

6. Minimo comune multiplo

Per risolvere alcuni problemi, è necessario prendere in considerazione non i divisori, ma i multipli comuni a più numeri.

DEFINIZIONE

Minimo comune multiplo. Si dice **minimo comune multiplo** di due numeri naturali non nulli a e b, e si indica con la scrittura mcm (a, b), il minore tra i multipli comuni ad a e b. Il minimo comune multiplo di tre o più numeri è il minore dei multipli comuni a tutti.



ESEMPIO

Calcoliamo il minimo comune multiplo tra 8 e 12. Scriviamo i primi multipli di entrambi i numeri.

Multipli di 8 = {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56...}

Multipli di 12 = {12, 24, 36, 48, ...}

Sia 24 che 48 sono multipli comuni e andando avanti ne troveremmo altri, ma il più piccolo è 24, quindi si ha

mcm(8, 12) = 24.

Allo stesso modo si ha:

$$\text{mcm}(5, 6) = 30 \qquad \text{mcm}(21, 63) = 63$$
$$\text{mcm}(25, 60) = 300 \qquad \text{mcm}(2, 5, 15) = 30$$
$$\text{mcm}(4, 24, 36, 72) = 72 \qquad \text{mcm}(5, 30, 45, 70) = 630$$

Ricordiamo la regola pratica per il calcolo del minimo comune multiplo.

STRATEGIE

Come calcolare il mcm

Per calcolare il mcm di due numeri:

1. scomponiamo in fattori primi i due numeri
2. prendiamo tutti i fattori comuni e non comuni, una sola volta e con l'esponente maggiore
3. il mcm è il prodotto fra questi numeri.

$$\textbf{mcm}(60,63) = ?$$
$$60 = \underline{2^2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5} \qquad 63 = \underline{3^2} \cdot \underline{7}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow$$
$$2^2 \quad 5 \qquad 3^2 \quad 7$$
$$\textbf{mcm}(60,63) = 2^2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1260$$

ESEMPIO

Calcoliamo il mcm tra 336, 180 e 660.

Poiché

$336 = 2^4 \times 3 \times 7$, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$,

in base alla regola ricordata, si ha:

$\text{mcm}(336, 180, 660) = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 55\,440$.

SI PUÒ FARE COSÌ

Attività fisica... senza rinunce!

Giulia fa jogging ogni 6 giorni e ogni 15 giorni segue un corso di difesa personale. Se il giorno in cui fa jogging e il giorno del corso coincidono, deve rinunciare alla corsa. Oggi è andata corso di autodifesa e ha dovuto saltare la corsa.

Tra quanti giorni le ricapiterà per la prima volta la stessa cosa?

E se... *Giulia volesse cambiare la frequenza con cui va a fare jogging in modo che i giorni in cui vi deve rinunciare alla corsa siano più rari, come potrebbe fare?*

Il numero di giorni che passano prima che Giulia debba andare sia a fare jogging sia al corso di autodifesa deve essere un multiplo sia di 6 che di 15. Se ci interessa la prima volta, dobbiamo cercare il più piccolo multiplo comune di 6 e di 15, cioè mcm(6, 15). Quindi tra 30 giorni dovrà di nuovo rinunciare alla corsa.

Per rendere più rari i giorni in cui salta la corsa, Giulia potrebbe decidere fare jogging con una frequenza che sia un numero coprimo con 15. Infatti in questo modo il minimo comune multiplo tra le due frequenze sarebbe uguale al loro prodotto, quindi il più grande possibile. Allora, per esempio, Giulia potrebbe andare a fare jogging una volta ogni 4 giorni. Così mcm(4, 15) $= 4 \times 15 = 60$ e i giorni di coincidenza sarebbero meno rari, pur avendo aumentato i giorni in cui fa jogging.

7. Numeri interi

Analizzando una tabella di dati relativi alle temperature minima e massima registrate in ogni capitale del mondo durante lo scorso anno, è lecito aspettarsi che la temperatura massima registrata a Il Cairo sia molto alta, e sicuramente "sopra lo zero", mentre la temperatura minima raggiunta in Serbia sarà molto probabilmente "sotto lo zero". Possiamo allora esprimere questi dati facendo precedere ciascun numero naturale da un **segno** che indichi la sua *posizione* rispetto allo zero.

In particolare, facciamo precedere i numeri minori di zero dal segno "$-$" e li diciamo **negativi**, mentre quelli maggiori di zero li facciamo precedere dal segno "$+$" e li diciamo **positivi**.

Infine poniamo $+0 = -0 = 0$ e per questa ragione lo zero non lo consideriamo né positivo né negativo.

Abbiamo chiamato *numeri* questi nuovi "oggetti" dotati di segno, perché è possibile, come abbiamo fatto per i naturali:

- ordinarli e quindi confrontarli;
- definire per essi le operazioni usuali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) in modo che continuino a volere le proprietà delle operazioni tra numeri naturali.

An element of the set $\mathbb{Z}$ is called **integer**.

Tali nuovi enti numerici vengono detti **numeri interi relativi** o più semplicemente **numeri interi**.

L'insieme dei numeri interi viene indicato con $\mathbb{Z}$.

DEFINIZIONE

Valore assoluto. Il valore assoluto di un numero intero a si indica con $|a|$ ed è uguale al numero stesso preso senza segno.

$$|a| = \begin{cases} +a \text{ se } a \geq 0 \\ -a \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

- $|3| = 3$, $|+3| = 3$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$.

valore assoluto — valore assoluto

$+35$ — -70

segno — segno

Il valore assoluto di un numero intero coincide, di fatto, con un numero naturale.

Quindi ogni numero intero si può scrivere come il suo valore assoluto, cioè in numero positivo, preceduto dal segno:

DEFINIZIONE

Numeri interi concordi e discordi. Due numeri interi diversi da zero si dicono **concordi** o **discordi** a seconda che abbiano lo stesso segno o segno contrario.

ESEMPIO

- $+12$ e $+3$ $\quad$ -9 e -73
  sono coppie di numeri **concordi**.
- $+4$ e -7 $\quad$ -5 e $+19$
  sono coppie di numeri **discordi**.

The number -19 is the **opposite** of 19. The opposite of zero is zero itself.

DEFINIZIONE

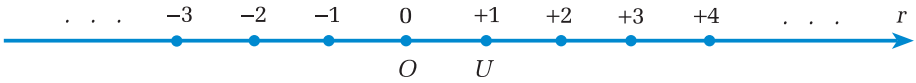
Numeri interi opposti. Due numeri interi discordi aventi lo stesso valore assoluto si dicono **opposti**. Il numero 0 è opposto di sé stesso.

ESEMPIO

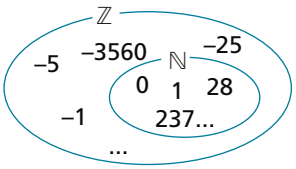
I numeri -19 e $+19$ sono opposti e pertanto $+19$ si dice l'opposto di -19.

Rappresentazione e ordinamento dei numeri interi

I numeri interi dell'insieme $\mathbb{Z}$ possono essere rappresentati su una retta nel modo che segue:



Questa rappresentazione mette in evidenza che l'insieme dei numeri naturali è un sottoinsieme dei numeri interi. Infatti la semiretta a destra dell'origine O rappresenta proprio i numeri naturali.



La rappresentazione dei numeri interi su una retta è quindi analoga a quella dei numeri naturali, solo che in questo caso l'unità di misura viene riportata, a partire dallo zero, sia nel verso della freccia (numeri positivi) sia nel verso contrario (numeri negativi).
L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi gode di molte proprietà, tra le quali ricordiamo le seguenti:

- **i numeri interi sono ordinati**

  $$\ldots,\ -57,\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ \ldots,\ +7,\ +8,\ \ldots,\ +73,\ +74,\ \ldots$$

- **non esiste un primo elemento**, ovvero nessun numero intero è più piccolo di tutti gli altri;
- ogni numero intero p è seguito immediatamente da un altro numero intero che viene detto il **successivo** di p;
- ogni numero intero è il successivo di un numero intero;
- l'insieme $\mathbb{Z}$ è un **insieme infinito**.

Nella pratica, spesso si omette il segno "+" che precede i numeri interi positivi e così, ad esempio, per indicare che le temperature minima e massima in un dato luogo sono state rispettivamente -3 e $+8$ gradi centigradi, si è soliti scrivere $-3°$C e $8°$C.
Nota che, in tal modo, gli interi positivi vengono, in pratica, identificati con i numeri naturali. In base a tale **convenzione di scrittura**, le espressioni si possono scrivere in modo molto semplice, come è mostrato qui sotto:

espressione originaria	espressione semplificata
$(+6)-(+3)+(-7)+(+11)-(+4)$	$6-3+(-7)+11-4$
$(-16)+(+7)-(-9)+(+1)-(+8)$	$-16+7-(-9)+1-8$

Anche con riferimento alla posizione sulla retta, due numeri interi sono tra loro confrontabili, utilizzando la seguente strategia

STRATEGIE

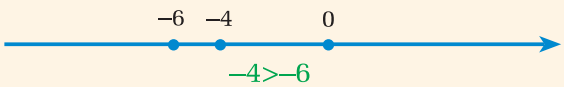
Come confrontare due tra numeri interi

1. Ogni intero positivo è maggiore di ogni intero negativo.

2. Il numero 0 è maggiore di ogni intero negativo e minore di ogni intero positivo.

3. Tra due interi positivi è maggiore quello che ha valore assoluto maggiore.

4. Tra due interi negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore.



8. Addizione e sottrazione di numeri interi

Nell'insieme dei numeri interi l'addizione si esegue in base alle regole che qui sotto riassumiamo.

L'addizione tra numeri interi concordi si riduce quindi all'addizione dei loro valori assoluti, che è un'operazione tra numeri naturali.

DEFINIZIONE

Addizione di numeri interi di segno concorde. La somma di due numeri interi concordi è un numero intero che:

- ha per valore assoluto la somma dei valori assoluti;
- ha per segno il segno comune degli addendi.

ESEMPIO

Per calcolare la somma $(-3) + (-9) + (-13)$, basta eseguire l'addizione dei loro valori assoluti, cioè $3 + 9 + 13 = 25$, e poi aggiungere il segno opportuno, che in questo caso è il segno ''$-$'', perché i tre numeri sono tutti negativi. Quindi, si ha

$(-3) + (-9) + (-13) = -(3 + 9 + 13) = -25.$

L'addizione tra numeri interi discordi si riduce quindi a una sottrazione di numeri naturali.

DEFINIZIONE

Addizione di numeri interi di segno discorde. La somma di due numeri interi discordi è un numero intero che:

- ha per valore assoluto la differenza tra il maggiore e il minore dei valori assoluti;
- ha per segno il segno del numero con maggiore valore assoluto.

In particolare la somma di due numeri opposti è zero.

ESEMPIO

Per calcolare $(-23) + (9)$ osserviamo che il maggiore tra i valori assoluti è 23, quindi eseguiamo la sottrazione tra il valore assoluto maggiore e quello minore, cioè $23 - 9 = 14$, in modo che il risultato sia un numero naturale.
Poiché il segno di 23 è il ''$-$'', anche il risultato della somma sarà negativo. Quindi

$(-23) + (+9) = -(23 - 9) = -14.$

Infine, per eseguire la sottrazione tra due interi si utilizza la seguente regola:

DEFINIZIONE

Sottrazione di due numeri interi. La differenza di due numeri interi è uguale alla somma del primo termine (**minuendo**) con l'opposto del secondo (**sottraendo**).

ESEMPIO

Per calcolare la sottrazione $(+13) - (-5)$, eseguiamo l'addizione di $+13$ con l'opposto di -5, cioè con $+5$. Quindi

$(+13) - (-5) = (+13) + (+5) = 13 + 5 = +18.$

Una qualsiasi sequenza di addizioni e sottrazioni tra numeri interi viene di

fatto calcolata come un'unica addizione, cui si dà il nome di **addizione algebrica** e il cui risultato viene detto **somma algebrica**. Ciò comporta una ulteriore semplificazione nella scrittura, come risulta dall'esempio che segue:

$$(+3)+(-2)-(-5)-(+7)+(+11)-(-4)=3-2+5-7+11+4=14$$

ESEMPIO

$$[+6-5-(-11)]+4-16-[8+7-(3-2)]=$$
$$=[6-5-(-11)]+4-16-[8+7-(+1)]=$$
$$=[(+1)-(-11)]+4-16-[(15)-(+1)]=$$
$$=[+12]+4-16-[14]=$$
$$=12+4-16-14=$$
$$=-14$$

PER SAPERNE DI PIU'

Fusi orari

Francesco e Giovanna acquistano un biglietto aereo Roma-San Pietroburgo, sul quale sono riportati i seguenti orari:

Andata		Ritorno	
Roma, Fiumicino	San Pietroburgo, Pulkovo	San Pietroburgo, Pulkovo	Roma, Fiumicino
mercoledì, 30 giugno	✈ mercoledì, 30 giugno	giovedì, 8 luglio	✈ giovedì, 8 luglio
11:10	**17:00**	**17:50**	**19:25**

A vista si accorgono che le durate del volo di andata e di quello del ritorno sono molto diverse. Il calcolo fornisce i seguenti risultati:

- il volo di andata dura 5 ore e 50 minuti
- il volo di ritorno dura 1 ora e 35 minuti.

È ragionevole ammettere che, per varie ragioni, ci sia una piccola differenza tra le durate dei due voli, ma non è plausibile che l'una risulti più del triplo dell'altra.

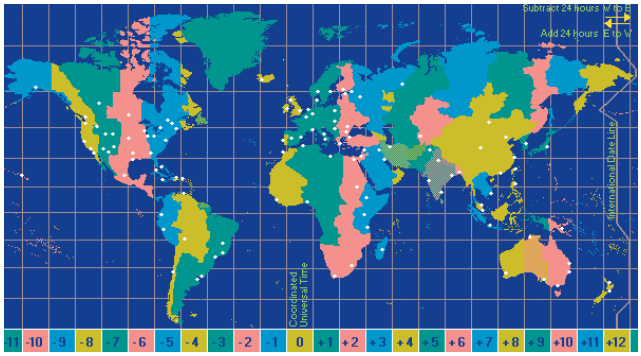
L'equivoco nasce dal fatto che Francesco e Giovanna si basano sulle ore locali delle due città e non tengono conto del fatto che tali ore locali sono diverse.

Per effetto della rotazione terrestre il sole non sorge contemporaneamente in ogni punto della terra, ma sorge prima nei luoghi più a est; così, per esempio, a San Pietroburgo sorge due ore prima che a Roma. Questo vuol dire, ad esempio, che se a San Pietroburgo sono le 11.30 del mattino, a Roma sono le 9.30 del mattino, cioè che, tra l'ora T(R) di Roma e l'ora T(SP) di San Pietroburgo, in un medesimo istante, vale la relazione T(R) + 2 = T(SP), ovvero T(R) = T(SP) – 2.

Tenendo conto di ciò ricalcoliamo le durate effettive delle due tratte del viaggio.

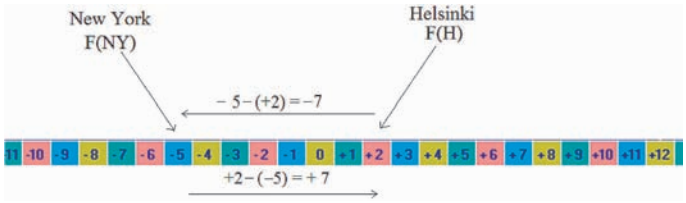
	Andata		Durata	Ritorno		Durata
	Partenza Roma, Fiumicino	Arrivo San Pietroburgo, Pulkovo		Partenza San Pietroburgo, Pulkovo	Arrivo Roma, Fiumicino	
Ora di Roma	**11:10**	**15:00**	**3:50**	**15:50**	**9:25**	**3:35**
Ora di San Pietroburgo	**13:10**	**17:00**	**3:50**	**17:50**	**21:25**	**3:35**

La differenza tra la durata del volo d'andata e quella del volo di ritorno è di 15 minuti e, su una durata complessiva di oltre 3 ore, è ragionevolmente accettabile.



In base a un accordo stabilito a livello mondiale, la superficie terrestre viene suddivisa in 24 spicchi di 15° gradi di ampiezza, chiamati fusi orari e a ogni punto del fuso viene attribuita la stessa ora (l'ora del suo meridiano centrale). Passando da un fuso ad un altro ad esso contiguo l'ora viene aumentata o diminuita di 1, a seconda che ci si sposti verso est o verso ovest. Su una carta geografica, cioè sul piano, i 24 fusi sono rappresentati da altrettante strisce. Per ragioni pratiche l'estensione di alcuni fusi è stata modificata come appare nella mappa dei fusi orari.

In base a una convenzione internazionale tutte le ore locali dei diversi fusi vengono messe in relazione con il fuso di Londra, preso come riferimento, che ha al suo centro il meridiano fondamentale di Greenwich.
Nella scala numerica alla base della mappa, fissato lo 0 sul fuso orario di Londra, ogni fuso è associato a un numero intero che va da –11 a +12 e tale numero indica la differenza tra l'ora di quel fuso e l'ora di Londra. La differenza oraria tra due luoghi è data pertanto dalla differenza tra i rispettivi fusi.



Nello schema si vede che, per esempio, per passare dall'ora di New York a quella di Helsinki si aggiunge la quantità T(H) – T(NY) = +5 + (–2) = +7, cioè si aggiungono 7 ore, mentre per passare dall'ora di Helsinki a quella di New York occorre aggiungere la quantità T(NY) – T(H) = –5 – (+2) = –7, cioè si tolgono 7 ore. Ciò vuol dire che, se, per esempio, a New York sono le 10:00 ad Helsinki sono le17:00.

In generale, per calcolare la durata di un volo dalla località *X* alla località *Y*, si utilizza il seguente modello matematico

$$D(X \rightarrow Y) = T(A) - T(P) + [F(X) - F(Y)]$$

ora di arrivo — ora di partenza — durata del viaggio — fuso orario luogo di arrivo — fuso orario luogo di partenza

In base a queste considerazioni Francesco e Giovanna possono calcolare la durata dei loro voli aggiungendo alla differenza calcolata sugli orari riportati su ciascun biglietto la differenza tra il fuso di arrivo e il fuso di partenza, come illustrato nella tabella che segue.

	1	2	3	4	5	6	7
	ora locale partenza	ora locale arrivo	differenza **2 – 1**	fuso orario partenza	fuso orario arrivo	differenza di fusi **4 – 5**	durata effetiva **3 + 6**
Andata	11:10	17:00	5:50	+1	+3	–2	3:50
Ritorno	17:50	19:25	1:35	+3	+1	+2	3:35

9. Moltiplicazione, divisione e potenze di numeri interi

Nell'insieme dei numeri interi, si definiscono anche le operazioni di moltiplicazione e, solo in alcuni casi particolari, di divisione.

DEFINIZIONE

Moltiplicazione di numeri interi. Il prodotto di due numeri interi relativi è un numero intero che:

- ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti;
- ha segno positivo se i due numeri sono concordi;
- ha segno negativo se i due numeri sono discordi.

ESEMPIO

Poiché i fattori della moltiplicazione $(-5) \times (-3)$ sono concordi il segno del prodotto è positivo. Il valore assoluto è il prodotto dei valori assoluti, cioè 15. Quindi

$(-5) \times (-3) = +15.$

Invece i fattori della moltiplicazione $(-5) \times (+3)$ sono discordi, quindi il segno del prodotto è negativo. Il valore assoluto è il prodotto dei valori assoluti, cioè 15. Quindi

$(-5) \times (+3) = -15.$

Il prodotto tra un numero intero e 0 è sempre uguale a 0:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Il prodotto tra un numero intero e 1 è sempre uguale al numero stesso:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Divisione di numeri interi

DEFINIZIONE

Divisione di numeri interi. Siano a e b due numeri interi tali che $|a|$ è multiplo di $|b|$ e $b \neq 0$. Allora il quoziente di a diviso b è un numero intero che:

- ha per valore assoluto il quoziente dei valori assoluti;
- ha segno positivo se i due numeri sono concordi;
- ha segno negativo se i due numeri sono discordi.

ESEMPIO

Calcoliamo $16 : (-4)$.

Il dividendo è multiplo del divisore, quindi la divisione è possibile. Inoltre è sottinteso il segno "+" davanti al 16, quindi i due numeri sono discordi. Il quoziente avrà il segno negativo. Il valore assoluto è uguale invece al quoziente dei valori assoluti, cioè 4. Si ha

$16 : (-4) = -4.$

Il criterio che permette di determinare il segno di un prodotto o di un quoziente di numeri interi può essere riassunto nella regola seguente.

×	+	−
+	+	−
+	−	+

REGOLA

Regola dei segni. Il segno del prodotto o del quoziente di due numeri interi è:

- positivo se i due numeri sono concordi;
- negativo se i due numeri sono discordi.

PER SAPERNE DI PIÙ

Una giustificazione della regola dei segni

È possibile dare una giustificazione della regola dei segni analizzando i vari casi possibili.

- **I due fattori sono entrambi positivi**. In questo caso il prodotto è praticamente un prodotto di numeri naturali, il cui risultato è ancora un numero naturale, e pertanto è positivo.
- **I due fattori sono discordi**. Prendiamo ad esempio la moltiplicazione $(-3) \times 4$. L'operazione richiesta equivale a sommare 4 volte il numero -3, cioè $(-3) \times 4 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$. Analogamente si prova che $(-3) \times 4 = 3 \times (-4) = -12$. L'argomentazione vale naturalmente per qualunque altra coppia di numeri interi discordi e mostra che il loro prodotto è sempre negativo.
- **I due fattori sono entrambi negativi**. Da $(-3) \times 4 = -12$ segue $(-12) : (-3) = 4$ e questo prova (vale in generale) che il quoziente di due numeri negativi è positivo. Di conseguenza non può essere $(-3) \times (-4) = -12$. Infatti, se così fosse si potrebbe dedurre che $(-12) : (-3) = -4$ e ciò non è possibile, perché abbiamo appena provato che il quoziente di due numeri negativi è positivo. Deve perciò essere $(-3) \times (-4) = 12$. Questo risultato, come i precedenti, non dipende dai numeri scelti, quindi vale in generale e stabilisce che il prodotto di due numeri negativi è positivo.

Con considerazioni simili si dimostra la regola dei segni per il quoziente (in parte già verificata).

Se abbiamo la moltiplicazione di più di due numeri interi, il prodotto è

- positivo se i segni "−" sono in numero pari
- negativo se i segni "−" sono in numero dispari.

ESEMPIO

- $(6 - 6) \times (+2) = 0 \times 2 = 0$
- $(3 + 2) : (-5) = (+5) : (-5) = -1$ dopo aver svolto le operazioni tra parentesi possiamo eseguire la divisione tra i due interi ottenuti perché sono uno multiplo dell'altro. Il segno del risultato è negativo perché i due operandi sono discordi
- Nella moltiplicazione

  $(-3) \times (-5) \times (-1)$

  i fattori negativi sono 3, cioè in numero dispari; quindi il prodotto è negativo:

  $(-3) \times (-5) \times (-1) = -15$

Potenze a base intera

L'operazione di elevamento potenza per i numeri naturali si estende ai numeri interi: se la base è un intero positivo, applichiamo le regole di calcolo dei numeri naturali, se invece è negativo, occorre tenere conto della regola dei segni. Ad esempio, si ha

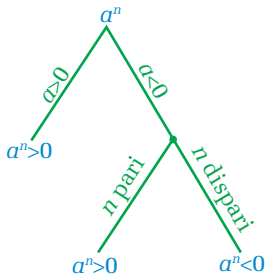
$(+3)^2 = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ $\qquad$ $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25 = 25$

$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (+25) \cdot (-5) = -125$ $\qquad$ $(+4)^3 = 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

DEFINIZIONE

Elevamento a potenza di numeri interi. La potenza di un numero intero è una potenza che ha per valore assoluto la potenza del valore assoluto della base e

- ha segno positivo se la base è positiva
- ha segno positivo se la base è negativa e l'esponente è pari
- ha segno negativo se la base è negativa e l'esponente è dispari.



ESEMPIO

$(+3)^3 = +27$ $\qquad$ $(-2)^4 = +16$ $\qquad$ $(-3)^3 = -27$ $\qquad$ $(-2)^5 = -32$

PER SAPERNE DI PIÙ

Chiusura di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Z}$ rispetto alle quattro operazioni

È noto che, nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, le operazioni di addizione e moltiplicazione tra due numeri non sono soggette ad alcuna limitazione. In altre parole, scelti arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$, è sempre possibile trovare in $\mathbb{N}$ il risultato delle operazioni $m + n$ e $m \times n$.

Questa circostanza si esprime dicendo che l'**insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione**.

Sappiamo invece che la sottrazione tra due numeri naturali, non sempre dà come risultato un numero naturale.

Ciò vuol dire che l'**insieme $\mathbb{N}$ non è chiuso rispetto alla sottrazione**.

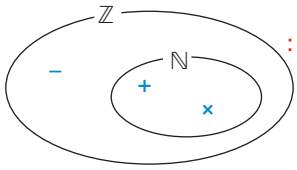
I numeri naturali sono dunque insufficienti per esprimere e operare con grandezze ''orientate''. Per questo è stato introdotto l'insieme dei numeri **interi** $\mathbb{Z}$. Tale insieme contiene come sottoinsieme proprio l'insieme $\mathbb{N}$ e ne è una estensione perché su $\mathbb{Z}$ sono definite le quattro operazioni aritmetiche fondamentali con le stesse proprietà valide in $\mathbb{N}$. Pertanto, l'**insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione**.

In più, ogni sottrazione $p - q$ tra numeri interi si trasforma nell'addizione $p + (-q)$ e poiché l'addizione è sempre possibile in $\mathbb{Z}$, anche la differenza tra due elementi di $\mathbb{Z}$ appartiene a $\mathbb{Z}$.

Ciò vuol dire che l'**insieme $\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto alla sottrazione**, cosa che invece non accade con $\mathbb{N}$.

Osserviamo infine che né $\mathbb{N}$ né $\mathbb{Z}$ sono chiusi rispetto alla divisione.

Per avere la chiusura rispetto a quest'ultima operazione sarà necessario ampliare ancora l'insieme dei numeri e introdurre, come verrà fatto nella prossima Unità, un nuovo insieme di numeri, estensione di $\mathbb{Z}$.



10. Sistemi di numerazione

Il numero 23 in numerazioni diverse:

κγ (greca)

(egizia)

XXIII (romana)

Ogni civiltà ha generato un proprio insieme di simboli e di regole di scrittura per rappresentare i numeri e svolgere operazioni con essi.
I Romani, per esempio, svilupparono una loro numerazione, utilizzata ancora oggi in scritture come: "la XXVII Olimpiade"; "la classe III A"; "il XVII secolo". Essi 'costruivano' i numeri, più o meno come delle case, utilizzando come 'mattoni' dei simboli di valore sempre costante:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Così, per rappresentare, ad esempio, il numero 1 255, prendevano un 'mattone' da 1 000, due 'mattoni' da 100, un 'mattone' da 50 e uno da 5: MCCLV.
Il valore del simbolo non dipende dalla posizione. Per costruire un numero si sommano i valori di ogni simbolo. Per questo motivo, tale sistema di numerazione è detto "additivo".

DEFINIZIONE

Sistema di numerazione additivo. Un sistema di numerazione viene detto **sistema di numerazione additivo** se il valore che assume ciascun simbolo è indipendente dalla sua posizione nella scrittura del numero.

ESEMPIO

Nei numeri XXVI, XV e IV il simbolo V rappresenta sempre il valore cinque.

Per come è congegnato il sistema "romano", non servono mai più di quattro simboli uguali. Anzi, per rendere il tutto più leggibile, i Romani introdussero una serie di abbreviazioni, grazie alle quali i simboli uguali affiancati non fossero mai più di tre. Pertanto,

IIII	→	IV	VIIII	→	IX
XXXX	→	XL	LXXXX	→	XC
CCCC	→	CD	DCCCC	→	CM

In tal modo, il numero 499, per esempio, anziché da CCCCLXXXXVIIII, era rappresentato da CDXCIX.

STRATEGIE

Come calcolare del valore di un numero "romano"

1. Scorri il numero da destra verso sinistra simbolo per simbolo;
2. se il simbolo è il primo scrivi il suo valore;
3. se il simbolo ne ha uno di valore minore alla propria destra, aggiungi il suo valore;
4. se il simbolo ne ha uno di valore maggiore alla propria destra, sottrai il suo valore.

XCV

V → 5

C > V + C → + 100

X < C − X → − 10

XCV = V + C − X → 5 + 100 − 10 = 95

ESEMPIO

Scriviamo nella numerazione romana i numeri 1 536 e 243.

- $1\,536 = 1\,000 + 500 + 3 \times 10 + 5 + 1$
  $M + D + X + X + X + V + I = MDXXXVI$
- $243 = 2 \times 100 + 40 + 3 \times 1$
  $C + C + XL + \ldots + I + I = CCXLIII$

Esprimi nella numerazione ordinaria i numeri CDLXXIV e XCIV.

- $CDLXXIV = V - I + X + X + L + D - C$
  $5 - 1 + 10 + 10 + 50 + 500 - 100 = 474$
- $XCIV = V - I + C - X$
  $5 - 1 + 100 - 10 = 94$

Sistema di numerazione posizionale

La numerazione che utilizziamo oggi, detta indo-arabica, è strutturalmente diversa da quella romana; in particolare, ogni numero viene rappresentato facendo uso delle sole dieci cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che assumono un **valore diverso** a seconda della loro **posizione**. Per esempio, il numero *tremilasettantatré*, che rappresentiamo con la scrittura 3073, è formato da 3 *migliaia*, 7 *decine* e 3 *unità*: la stessa cifra, "3", indica, a seconda della sua posizione, una volta le migliaia (e vale quindi *tremila*) e una volta le unità (e vale allora *tre*).
Inoltre, 3073 si può scrivere anche nella forma

$$3 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

ovvero $3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$. In sostanza, quindi, la presenza della cifra 0 indica che sono "assenti" le *centinaia*.
Per meglio comprendere il meccanismo di scrittura dei numeri e la funzione dello 0 nel sistema indo-arabico, esaminiamo il funzionamento di un contatore dell'energia elettrica.
In ciascuna casella scorrono ciclicamente, nell'ordine, le cifre 0, 1, 2, ..., 9 e, ogni volta che il contenuto di una casella passa da 9 a 0, nella casella alla sua sinistra il numero aumenta di 1 (se è 9 diventa 0 e la cifra alla sua sinistra aumenta di una unità). Ogni unità di una casella vale cioè dieci volte l'unità della casella alla sua destra.

DEFINIZIONE

Sistema di numerazione posizionale. Un sistema di numerazione nel quale il valore dei simboli usati dipende dalla posizione che occupano all'interno della scrittura del numero viene detto **sistema di numerazione posizionale**.

Il sistema di numerazione indo-arabico è quindi un sistema posizionale. Infatti, dati ad esempio i numeri 25, 517, 2359, la cifra 5 ha valore, rispettivamente, "cinque", "cinquecento", "cinquanta". Questo vuol dire che possiamo scrivere:

$$25 = \underbrace{2 \cdot 10^1}_{20} + \underbrace{5 \cdot 10^0}_{5} \qquad 517 = \underbrace{5 \cdot 10^2}_{500} + \underbrace{1 \cdot 10^1}_{10} + \underbrace{7 \cdot 10^0}_{7}$$

$$2359 = \underbrace{2 \cdot 10^3}_{2000} + \underbrace{3 \cdot 10^2}_{300} + \underbrace{5 \cdot 10^1}_{50} + \underbrace{9 \cdot 10^0}_{9}$$

Tale scrittura, ottenuta usando le potenze di dieci, si chiama **forma polinominale** del numero.
Poiché utilizza dieci simboli (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) il sistema di numerazione indo-arabico, viene anche detto **sistema di numerazione posizionale di base dieci** o, più brevemente, **sistema decimale**.
Un sistema posizionale, rispetto a uno additivo, ha molti vantaggi, tra i quali:

- la scrittura e la lettura dei numeri è più semplice;
- il confronto tra due numeri distinti per stabilire quale è maggiore è immediato;
- qualsiasi numero, grande quanto si vuole, si può esprimere utilizzando solo le cifre 0, 1, ... 9, mentre in una numerazione additiva è necessario inventare sempre nuovi simboli per scrivere numeri sempre più grandi (per scrivere 100 000, ad esempio, i Romani utilizzavano il simbolo $\overline{C}$ e ogni simbolo sopralineato aveva il valore di base moltiplicato per 1000);
- le operazioni aritmetiche vengono eseguite con maggiore semplicità.

11. Passaggi di base

Nel paragrafo precedente, abbiamo scritto il numero 2359 come somma di ciascuna delle sue cifre moltiplicata per una opportuna potenza di dieci:

$$2359 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

L'avere scelto il numero *dieci* come base delle potenze dipende dal fatto che, come si è già notato, utilizziamo *dieci* cifre per rappresentare i numeri. Potremmo però anche utilizzarne un numero maggiore o minore. La base minima per una numerazione posizionale è *due* (devono essere presenti almeno un simbolo per lo **zero** e uno per l'**unità**).

DEFINIZIONE

Sistema binario. Si dice **sistema di numerazione posizionale in base due** o, più brevemente, **sistema binario** il sistema di numerazione che utilizza i soli simboli 0 e 1.

			0	zero
			1	uno
		1	0	due
		1	1	tre
	1	0	0	quattro
	1	0	1	cinque
	1	1	0	sei
	1	1	1	sette
1	0	0	0	otto
1	0	0	1	nove
1	0	1	0	dieci
1	0	1	1	undici

Nella tabella a fianco sono rappresentati, in base *due*, i primi dodici numeri naturali. Riprendendo l'esempio del contatore, possiamo immaginare che ogni riga successiva della tabella rappresenti il display dopo un nuovo scatto: il numero degli scatti è allora il numero naturale scritto in lettere a destra.
Dobbiamo pensare che le cifre che scorrono in ogni casella sono soltanto 0 e 1 e ogni volta che il contenuto di una casella passa da 1 a 0, nella casella alla sua sinistra se è 0 diventa 1 e se è 1 diventa 0.

Nel sistema binario il numero 10 che si legge "uno, zero" (non "dieci"!) rappresenta il numero due, cioè

$$1 \cdot 2 + 0 \cdot 2^0$$

Se non si precisa la base una scrittura del tipo 110 è ambigua. Scriveremo allora 110_{dieci} e 110_{due} per indicare che operiamo, rispettivamente, in base *dieci* e in base *due*: 110_{dieci} rappresenta il numero naturale centodieci, mentre 110_{due} rappresenta il numero naturale sei. Infatti 110 vuol dire 0 unità, 1 coppia quindi 2 e una quaterna cioè 2^2, in tutto 6.
Il numero che nel sistema binario è rappresentato con 110101 può essere espresso nel sistema decimale con la seguente scrittura polinomiale:

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

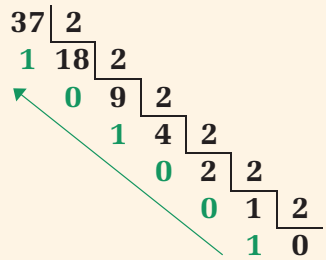
In questo modo riusciamo ad avere la scrittura decimale di un numero espresso in base *due*.

STRATEGIE

Come passare dalla scrittura decimale alla scrittura binaria di un numero

Dato un numero per scriverlo in base due possiamo procedere così:

1. eseguiamo, in base *dieci*, una serie di divisioni successive per due fino a ottenere quoziente 0;
2. scriviamo di volta in volta i resti di ogni divisione possono essere solo 0 o 1, perché devono essere minori di 2;
3. scriviamo tutti i resti, nell'ordine inverso, dall'ultimo al primo.

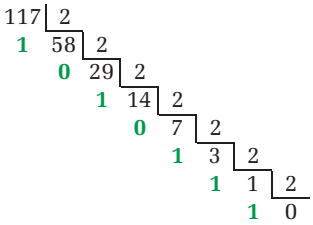


$37_{dieci} = 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1_{due}$

ESEMPIO

- Esprimiamo in forma decimale il numero 110010_{due}.
  Possiamo attraverso la forma polinomiale. Si ha:
  $110010_{due} = (1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0)_{dieci} =$
  $= (32 + 16 + 2)_{dieci} = 50_{dieci}$

- Determiniamo l'espressione in base *due* del numero 117_{dieci}.



Operando secondo lo schema delle successive divisioni per due, si hanno i resti indicati a fianco.

Risulta pertanto: $117_{dieci} = 1110101_{due}$.

PER SAPERNE DI PIÙ

Operazioni in base due

Le operazioni fondamentali nella base *due* si eseguono esattamente come nella base *dieci*. Occorre però ricordare che, nel ''riporto'', $1_{due} + 1_{due} = 10_{due}$ e, nel ''prestito'', $10_{due} - 1_{due} = 1_{due}$:

$101_{due} + 11_{due} = 1000_{due}$

riporto

+1	+1	+1		
	1	0	1	+
		1	1	=
1	0	0	0	

$110_{due} \times 11_{due} = 10010_{due}$

riporto

+1	+1				
		1	1	0	×
			1	1	=
		1	1	0	
	1	1	0	–	
1	0	0	1	0	

$1101_{due} - 111_{due} = 110_{due}$

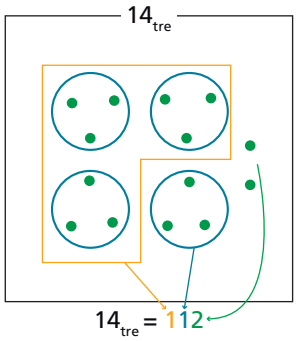
prestito

	10	10		
1	1	0	1	–
	1	1	1	=
0	1	1	0	

$1001_{due} : 11_{due} = 11_{due}$

	1001	11
	11	11
[100 – 11 =]	011	
	11	
	0	

Altre basi



Oltre alla base *dieci* e alla base *due*, si può utilizzare qualsiasi base (maggiore di due) per costruire un sistema di numerazione posizionale.
Il numero di cifre utilizzate coincide sempre con la base: in base *cinque* si utilizzano solo le cifre 0, 1, 2, 3, 4, in base *tre* solo le cifre 0, 1, 2. Se la base scelta supera *dieci*, occorre allora introdurre altri simboli, oltre alle dieci cifre usuali 0, 1, ... , 9.

ESEMPIO

Per contare in base *sedici*, si possono utilizzare come cifre i simboli 0, 1, ... , 9, A, B, C, D, E, F e avremo: $A_{sedici} = 10_{dieci}$, $B_{sedici} = 11_{dieci}$, $C_{sedici} = 12_{dieci}$, $D_{sedici} = 13_{dieci}$, $E_{sedici} = 14_{dieci}$, $F_{sedici} = 15_{dieci}$.
Con $1B_{sedici}$ e $2AB_{sedici}$ si esprimono quindi rispettivamente i numeri rappresentati, in base *dieci*, con le scritture 27 e 683. Possiamo scrivere infatti (omettendo per semplicità l'indicazione della base quando è *dieci*):

$$1B_{sedici} = 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 27$$

$$2AB_{sedici} = 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 512 + 160 + 11 = 683$$

Vi sono proprietà dei numeri che valgono qualunque sia la base in cui sono espressi. Altre, invece, non si conservano cambiando sistema di numerazione.

La proprietà ''essere pari'' si conserva nei passaggi di base.

Una proprietà dei numeri che non dipende dal particolare sistema di numerazione in cui vengono rappresentati è quella di essere primo.
Al contrario, una proprietà dei numeri che dipende dal sistema di numerazione utilizzato è quella per cui un numero divisibile per due termina con una cifra pari. Infatti:

- in base *dieci* la proprietà è valida (criterio di divisibilità);
- in base *tre*, ad esempio, il numero quattro è rappresentato con 11_{tre} ovvero termina con una cifra dispari.

Si potrebbe provare che questa proprietà vale in tutte e sole le basi pari.

Passaggi di base

Dato un numero espresso in una base b, per scriverlo in base *dieci* ci si riconduce al suo sviluppo polinomiale, come già si è visto.

ESEMPIO

- $3201_{cinque} = (3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0)_{dieci} = (3 \cdot 125 + 2 \cdot 25 + 1)_{dieci} = 426_{dieci}$
- $2AB_{dodici} = (2 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0)_{dieci} = (288 + 120 + 11)_{dieci} = 419_{dieci}$
- $100100_{due} = (1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2)_{dieci} = (32 + 4)_{dieci} = 36_{dieci}$

Per passare invece dalla rappresentazione di un numero in base *dieci* alla sua rappresentazione in un'altra base b, si utilizza il metodo delle divisioni successive, come già si è visto per la base *due*.

ESEMPIO

Per rappresentare il numero 233_{dieci} in base *quattro* si procede come nello schema a fianco e, scrivendo i resti in ordine inverso, dall'ultimo al primo, otteniamo $3221_{quattro}$.
Si può poi verificare la correttezza del risultato:

$3221_{quattro} = (3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0)_{dieci} = (192 + 32 + 8 + 1)_{dieci} = 233_{dieci}$

STRATEGIE

Come passare da una base a un'altra

Per scrivere un numero espresso in base b in una base a diversa da b e da *dieci*, si può effettuare il passaggio direttamente, ma si può anche mediare attraverso la base *dieci*:

1. il numero espresso in base b viene riscritto in base *dieci*;
2. il numero espresso in base *dieci* viene riscritto in base a.

$$\mathbf{4103_{cinque} =}$$
$$\mathbf{= (4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0)_{dieci} =}$$
$$\mathbf{= (500 + 25 + 3)_{dieci} = 528_{dieci} =}$$
$$\mathbf{= 4103_{cinque} = 528_{dieci} = 1353_{sette}}$$

528	7			
3	75	7		
	5	10	7	
		3	1	7
			1	0

ESEMPIO

Per scrivere 21_{tre} in base *cinque* scriviamo prima il numero in base *dieci*, portandolo nella forma polinomiale:

$21_{tre} = (2 \times 3^1 + 1 \times 3^0)_{dieci} = (6 + 1)_{dieci} = 7_{dieci}$

7	5	
2	1	5
	1	0

Attraverso il metodo delle divisioni successive troviamo: $7_{dieci} = 12_{cinque}$.
Per scrivere il numero 71_{otto} in base *sei* scriviamo prima il numero in base *dieci*, portandolo nella forma polinomiale:

$71_{otto} = (7 \times 8^1 + 1 \times 8^0)_{dieci} = 57_{dieci}$

57	6		
3	9	6	
	3	1	6
		1	0

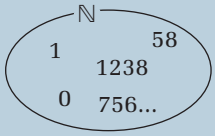
Attraverso il metodo delle divisioni successive troviamo $57_{dieci} = 133_{sei}$.

Numeri naturali e numeri interi

In sintesi

1. Numeri naturali

- L'insieme dei **numeri naturali si indica con** $\mathbb{N}$ e per scrivere i numeri naturali usiamo dieci cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.



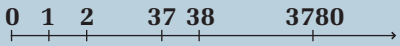
- Ogni numero naturale n è seguito immediatamente da un altro numero naturale, detto **successivo** di n.

successivo di 999

999 1000

precedente di 1000

- I numeri naturali si possono rappresentare su una retta, fissando, su questa, un orientamento, un punto che rappresenta lo 0 e il segmento che rappresenta il passo tra un numero e il successivo.



- Una scrittura formata da due espressioni separate dal segno "=" è detta **uguaglianza**. Se tra le espressioni c'è uno dei simboli ">", "<", "≠", "≤", "≥", allora la scrittura di chiama **disuguaglianza**.
  In entrambe i casi l'espressione a sinistra del simbolo si chiama **primo membro**, l'espressione a destra **secondo membro**.

uguaglianza

$$15 + 3 = 3 \times 6$$

primo membro secondo membro

$$15 < 3 \times 6$$

disuguaglianza

2. Operazioni con i numeri naturali

- Le **operazioni** che si possono eseguire con i numeri naturali sono
  - **addizione**: il risultato è sempre un numero naturale;
  - **sottrazione**: possibile solo se il minuendo è maggiore del sottraendo;
  - **moltiplicazione**: il risultato è sempre un numero naturale;
  - **divisione**: il risultato è un numero naturale solo se il resto è uguale a 0;
  - **elevamento potenza**: il risultato è sempre un numero naturale. Non ha senso la scrittura 0^0.

addendi minuendo differenza

$$3 + 5 = 8 \qquad 5 - 3 = 2$$

somma sottraendo

fattori

$$3 \times 5 = 15$$

prodotto

dividendo resto

$$5 : 3 \rightarrow 5 = 3 \times 1 + 2$$

divisore quoziente

esponente

base $3^2 = 9$ potenza

- L'addizione e la moltiplicazione godono
  - della **proprietà commutativa**
  - della **proprietà associativa**

$$a \square b = b \square a \qquad \square < {}^{+}_{\times}$$

$$(a \square b) \square c = a \square (b \square c) \qquad \bigcirc < {}^{+}_{-}$$

$$(a - b) = (a \bigcirc c) - (b \bigcirc c) \qquad \triangle < {}^{\times}_{:}$$

$$a : b = (a \triangle c) : (b \triangle c) \qquad * < {}^{\times}_{:}$$

- La sottrazione gode della **proprietà invariantiva**.
  La divisione gode della **proprietà invariantiva**.
  Vale la **proprietà distributiva della moltiplicazione e della divisione rispetto all'addizione e alla sottrazione**.

$$a * (b \diamond c) = a * b \diamond a * c \qquad \diamond < {}^{+}_{-}$$

- Il **prodotto di due potenze con la stessa base** è una potenza con la stessa base e con esponente uguale alla somma degli esponenti.
  Il **quoziente di due potenze con la stessa base** è una potenza con la stessa base e con esponente uguale alla differenza degli esponenti.
  Una **potenza di una potenza** è una potenza che ha come esponente il prodotto degli esponenti.
  Il **prodotto (quoziente) di due potenze con lo stesso esponente** è una potenza che ha per basi il prodotto (quoziente) delle basi e per esponente lo stesso esponente.
- Per risolvere una espressione senza parentesi, si eseguano prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, nell'ordine in cui compaiono, infine addizioni e sottrazioni.
  Se ci sono le parentesi si segue lo stesso ordine ma eseguendo prima le operazioni nelle parentesi tonde, poi nelle quadre e infine nelle graffe.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

$a^c * b^c = (a * b)^c$ $\quad * \begin{cases} \times \\ : \end{cases}$

( )
[ ] 1° { }
2° 3°

a^n
×: 1° +−
2° 3°

3. Numeri primi e divisibilità

- Dati due numeri n e m, se riusciamo a trovare un numero naturale k tale che $n = m \times k$, allora
  - n è un **multiplo** di m
  - m è un **divisore** di n
  - n è **divisibile** per m

  I divisori di n sono sempre minori o al più uguali a n.
  I multipli di un numero sono infiniti.
  Ogni numero è divisibile per 1 e per se stesso ed è multiplo di se stesso.
- Un numero è **primo** se è divisibile solo per 1 e per se stesso, altrimenti si dice **composto**.

multiplo di 6
$12 = 6 \times 2$ divisori di 12

multiplo di se stesso
$a = 1 \cdot a$ divisore di se stesso
divisore di ogni numero

Divisori di 17 = {1, 17}
17 è primo

4. Scomposizione in fattori primi

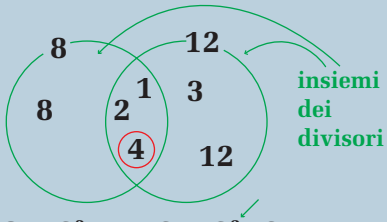
- Un numero è **scomposto in fattori primi** se è scritto come prodotto di potenze di numeri primi.
  Per scomporre i numeri si individuano i divisori e si divide il numero per un suo divisore, il risultato per un divisore e così via fino ad ottenere 1.

324	2
162	2
81	3^4
1	

fattori primi
$324 = 2^2 \cdot 3^4$
numero scomposto

5. Massimo Comun Divisore

- Il **Massimo Comun Divisore** tra due numeri è il più grande divisore comune.
- Per calcolare il MCD tra due numeri, si scompongono in fattori primi i due numeri e si moltiplicano i fattori comuni presi con l'esponente più basso.
- Due numeri si dicono **primi fra loro** o **coprimi** se il loro MCD è uguale a 1.



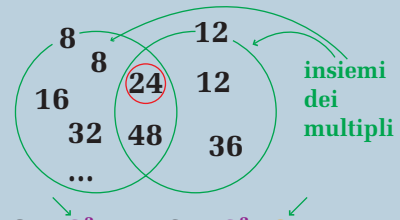
$8 = \underline{2}^3$ $\quad 12 = \underline{2}^2 \cdot 3$

$MCD\ (8,12) = 2^2$

$MCD\ (6,35) = 1 \rightarrow 6\ \ 35$ coprimi

6. Minimo comune multiplo

- Il **minimo comune multiplo** tra due numeri è il più piccolo multiplo comune.
- Per calcolare il mcm tra due numeri, si scompongo in fattori primi i due numeri e si moltiplicano i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta con l'esponente più alto.

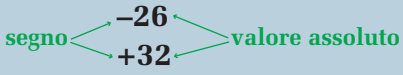


$8 = 2^3 \qquad 12 = 2^2 \cdot 3$

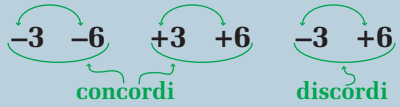
$\text{mcm}\,(8,12) = 2^2 \cdot 3$

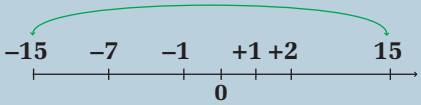
7. Numeri interi

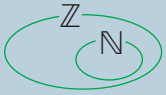
- Un **numero intero** è dato da un numero naturale preceduto dal segno "+", i numeri **positivi**, o dal segno "–", i numeri **negativi**.
- Il valore assoluto di un numero intero è il numero stesso senza il segno.
- Due numeri interi sono **concordi** se hanno lo stesso segno e **discordi** se hanno segni diversi.
- Due numeri si dicono **opposti**, se hanno uguale valore assoluto e diverso segno.
- I numeri interi si possono rappresentare su una retta mettendo prima della zero i numeri negativi.
- L'insieme dei numeri naturali è contenuto nell'insieme dei numeri interi.



$|-15| = 15$
$|+35| = 35$ — numero naturale







8. Addizione e sottrazione di numeri interi

- L'**addizione di due numeri concordi** è un numero che ha per segno lo stesso segno e per valore assoluto la somma dei valori assoluti.
- L'**addizione di due numeri discordi** è un numero che ha per segno il segno del numero con il valore assoluto maggiore e per valore assoluto la differenza tra il valore assoluto maggiore e quello minore.
- La **differenza tra due numeri interi** è uguale alla somma del primo termine con l'opposto del secondo.

$(+3) + (+5) = +(3+5)$

$(-3) + (-5) = -(3+5)$

$(+3) + (-5) = -(5+3)$

$|3| < |-5|$

$(+5) - (-3) = (+5) + (+3)$

9. Moltiplicazioni, divisioni e potenze di numeri interi

- Il **prodotto (quoziente) di due numeri interi** è un numero positivo, se i numeri sono concordi e negativo se i numeri sono discordi. Il valore assoluto è uguale al prodotto (quoziente) dei valori assoluti.

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$|a : b| = |a| : |b|$

×:	+	–
+	+	–
–	–	+

- La **potenza** di un numero intero con esponente positivo è un numero positivo se la base è positiva o se la base è positiva e l'esponente è pari, è un numero negativo se la base è negativa e l'esponente è dispari.

$a > 0 \qquad a^n > 0$

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n \text{ se } n \text{ è pari} \\ -a^n \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

10. Sistemi di numerazione

- Un sistema di numerazione in cui il valore dei simboli usati è indipendente dalla posizione occupata si chiama **sistema di numerazione additivo.** Un sistema di numerazione in cui il valore dei simboli dipende dalla posizione occupata si chiama **sistema di numerazione posizionale**.
- Noi usiamo il **sistema decimale** perché per scrivere i numeri usiamo dieci cifre.
  Un numero è espresso in **forma polinomiale** se è scritto come somma di multipli di potenze di dieci.

numerazione additiva

IXVI → 96

numerazione posizionale

200

3232 — 2

3000 30

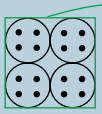
forma polinomiale

$253 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3$

11. Passaggi di base

- Quando si usa il **sistema in base due** o **sistema binario** si utilizzano solo due cifre: 0, 1. In forma polinomiale i numeri sono scritti usando le potenze di 2.
- Oltre alla base dieci e alla base due si può usare una qualunque base. Il numero di cifre usate in base n è n.
- Ogni numero in base n si può scrivere in forma polinomiale usando le potenze di n.
- Per passare da una base all'altra possiamo usare la scrittura polinomiale per arrivare alla base 10 e poi passare dalla base dieci alla base desiderata.

$1101_{due} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 =$
$= 8 + 4 + 1 = 13_{dieci}$



$113_{quattro} = 23_{dieci}$

$23 : 4 = 5 \quad R = 3$
$5 : 4 = 1 \quad R = 1$
$1 : 4 = 0 \quad R = 1$

$113_{quattro} = 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 4^0$

ESERCIZI DI PARAGRAFO

1. Numeri naturali

In ciascuna situazione stabilisci se il "numero" indicato è un numero naturale oppure no e, in caso affermativo, se ha significato ordinale o cardinale.

1 Il numero stampato in basso su ciascuna pagina di un libro.

2 Il numero massimo di persone ammesse in un ascensore.

ESERCIZIO SVOLTO

3 Il numero di linea di un autobus.

Il numero di linea di un autobus non è un numero naturale. Ad esempio, il numero 88 che corrisponde a una determinata linea non indica né una quantità né un ordine.

4 Il numero che contraddistingue un brano in un CD musicale.

• **5** Il numero impresso sulla suola di un paio di scarpe. [No]

• **6** Il numero sul bottone dell'ascensore corrispondente al piano più alto di un caseggiato.

• **7** Il numero degli abitanti di una città.

ESERCIZIO SVOLTO

8 Il numero di accesso di un bancomat.

Il numero di accesso di un bancomat è usato non come un numero vero e proprio, bensì come codice, come etichetta e pertanto non ha significato né ordinale né cardinale. Esso è infatti un insieme di cifre usate come puri simboli e può essere quindi considerato come una parola di un linguaggio il cui alfabeto è costituito dalle cifre 0, 1, 2, ..., 9.

• **9** Il numero che individua la posizione di una data squadra di calcio in una classifica.

• **10** Il numero di telefono di Marco.

• **11** Il numero degli iscritti di una scuola.

• **12** Il numero civico di un'abitazione. [No]

• **13** Il numero corrispondente a ogni alunno in un registro di classe.

Rispondi alle seguenti domande.

14 Quante sono le cifre? Quanti sono i numeri naturali? Quanti sono i naturali di tre cifre?

15 Quanti sono i numeri naturali che hanno meno di 3 cifre?

• **16** Scrivi i successivi dei seguenti numeri naturali: 1, 10, 99, 250. Scrivi poi anche i numeri naturali che hanno come successivi i numeri dati.

• **17** Quali sono i numeri naturali che hanno per successivo rispettivamente 100, 32, 1, 67, 99999?

• **18** Qual è il più piccolo numero naturale che si può scrivere con due cifre diverse tra loro e diverse da 0? E il più grande?

19 È sempre vero che il successivo, $n+1$, di un numero naturale n ha tutte le cifre uguali a quelle di n salvo l'ultima? In quali casi non è vero?
(*Considera i numeri 99, 149, 2728, 2999.*)

Rappresenta sulla retta numerica i seguenti numeri.

20 7 5 12

21 8 e il suo successivo.

22 15 e il suo precedente.

23 13, il suo successivo e il successivo del successivo.

24 Il precedente del precedente di 4.

Scrivi tutti i numeri naturali che verificano le relazioni indicate.

25 $n < 7$ $n \leq 5$ $2 \leq n < 6$

26 $3 < n < 5$ $3 \leq n < 5$ $3 \leq n < 4$

27 $a-2 < n \leq a+1$ $a \leq n < a+1$ $a-1 < n < a+1$

In ciascuna delle seguenti scritture sostituisci ai puntini un segno opportuno scelto fra "=", ">", "<".

28 101 200

29 240 339

30 a ..... successivo di a

31 a ..... successivo di $(a-1)$

32 (successivo di a) -1 ..... successivo di $(a-1)$

Rispondi alle seguenti domande.

33 Quali delle seguenti disuguaglianze sono vere?

$5 < 5$ $5 \leq 5$
$n > n+1$ $n \geq n+1$
$5 > 5$ $5 \geq 5$
$n < n+1$ $n-1 < n$

Tutor!
Dati due numeri naturali, è sempre possibile stabilire se l'uno è maggiore, minore o uguale all'altro.

34 Quanti sono i numeri naturali minori o uguali a 100 che iniziano con la cifra 1? E quanti quelli che contengono la cifra 1?

35 How many natural numbers are lower or equal than 200 and begin with 1? And how many are the ones which contain the digit 1?

36 Nell'insieme dei naturali da 0 a 200, sono di più i numeri che contengono la cifra 1 o quelli che contengono la cifra 2?

37 Quanti numeri compresi tra 100 e 999 si possono formare utilizzando (anche con ripetizioni) le cifre 1, 2 e 5? E quanti utilizzando 0, 1 e 2?
Ripeti l'esercizio per numeri compresi tra 10 e 99. [27; 18; 9; 6]

38 Siano n un numero naturale di due cifre e n' il numero ottenuto scambiando le cifre di n. In quali casi $n > n'$ e in quali $n = n'$? [$n > n'$ se la prima cifra è maggiore della seconda...]

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

39 Esiste un numero naturale che non ha un successivo. V F

• **40** Esiste un numero naturale che non è il successivo di un altro numero naturale. V F

• **41** Esistono due numeri naturali diversi dei quali non è possibile stabilire il maggiore. V F

•• **42** Data la scrittura $a + 13 < 14$, non esiste alcun numero naturale che, sostituito ad a, renda vera la disuguaglianza. V F

•• **43** Dati due numeri naturali a e b, diversi tra loro, si ha sempre che $a < b$ o $b < a$. V F

2. Operazioni con i numeri naturali

Indica il numero naturale, se esiste, che rende vere le seguenti uguaglianze.

• **44** $23 - ..... = 15$

• **45** $.... + 21 = 32$

• **46** $4 + ... = 4$

• **47** $3 - ..... = 0$

• **48** $3 - ..... = 3$

• **49** $17 + ... = 102$

• **50** $5 : ..... = 5$

• **51** $..... : 4 = 4$

• **52** $..... \times 9 = 9$

• **53** $(.....)^3 = 1$

• **54** $..... : 5 = 0$

• **55** $..... \times 7 = 0$

• **56** $(...)^3 = 0$

• **57** $(...)^{3245} = 1$

Tutor!
Ricorda che l'1 e lo 0 sono l'elemento neutro rispettivamente della moltiplicazione e dell'addizione.

• **58** $45\,779^0 = ...$

•• **59** $(..... + 7) : 5 = 34 : (10 + 7)$

•• **60** $30 - (7 \times 8) : 2 - 1 = (7 - 3) : 2 - .....$

•• **61** $11 - 2^{.....} = 27 : 9$

•• **62** $5 - (...)^7 = 4$

•• **63** $(...)^{23} + 107 = 107$

•• **64** $(2 + ...)^3 = 125$

•• **65** $(48 - 3^{.....}) : 7 = (3^3 - 2^3 - .....) : 8 + 1$

•• **66** $... +$ successivo di $... = 25$

•• **67** $... +$ successivo di $(... - 1) = 12$

Risolvi.

68 Scrivi le potenze di 5 comprese tra 0 e 31.

• **69** Dati i numeri 9, 27, 41, 12, 36, 3, 90, 32, indica quali, tra loro, sono potenze di 3.

• **70** Quali fra le seguenti potenze di 2 sono anche potenze di 4?
1 2 4 8 16 32 64 128 256 1024

• **71** Qual è la massima potenza di 3 a due cifre?

•• **72** Per ciascun numero scrivi la massima potenza di 2 che lo divide.
12 102 36 72

Traduci in espressioni aritmetiche le frasi riportate di seguito.

73 Sottrai al prodotto di 12 e 4 la somma di 13 e 5.

74 Add 27 to the product of 4 and 9.

75 Moltiplica la differenza di 15 e 7 per la somma di 3 e 5.

• **76** Al quoziente di 72 e 3 sottrai il prodotto dei tre numeri 2, 3 e 4.

Quale operazione rappresenta il simbolo "$*$" nelle seguenti uguaglianze?

77 $10 * 7 = 3$

78 $1 * 8 = 9$

• **79** $7 * 5 = 3 * 1$

• **80** $12 * 4 = 9 * 3$

• **81** $3 * 4 = 6 * 2$

• **82** $7 * (5 * 4) = 6$

• **83** $4 = 8 * (6 * 3)$

••• **84** $20 * 2 * (25 * 5) = 12 * (12 * 2)$

Dalla tabella, stabilisci quale operazione con i numeri naturali rappresenta il simbolo "$*$".

85

$*$	0	7	80
5	5	12	85
7	7	14	87
9	9	16	89

86

$*$	3	11	13
7	21	77	91
11	33	121	143
17	51	187	221

••• **87**

$*$	8	9	13
3	2	0	1
4	0	1	1
5	3	4	3

In base a quale proprietà è possibile stabilire la validità delle seguenti uguaglianze?

88
$25 + 12 + 5 = 25 + 5 + 12$
$23 + 7 + 9 = 30 + 9$
$12 + 8 + 15 + 21 = 20 + 36$

89
$5 \cdot 7 \cdot 4 = 5 \cdot 28$
$9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 11 = 36 \cdot 22$
$5 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 7 = 5 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 3$

90
$77 - 13 = 74 - 10$
$95 - 43 = 100 - 48$
$240 : 16 = 60 : 4$

91
$7 \cdot (5 + 9) = 35 + 63$
$17 \cdot 13 = 17 \cdot 10 + 17 \cdot 3$
$(45 - 21) \cdot 8 = 45 \cdot 8 - 21 \cdot 8$

92
$5^3 \cdot 5^2 = 5^5$
$35^4 : 7^4 = 5^4$
$(3 \cdot 4)^3 = 27 \cdot 64$

••• **93**
$(7^6)^4 : 7^{24} = 1$
$(3^2)^4 = (3^4)^2$
$(12)^2 \cdot 2^6 = 2^{10} \cdot 3$

Completa usando le proprietà delle operazioni.

94
$(5 - 3) - (4 - \ldots) = 5 - 4$
$12 \cdot 3 = 4 \cdot (\ldots \cdot 3)$
$7 + \ldots = 5 + 7$

95
$(7 + 5) \cdot \ldots = 21 + \ldots$
$(28 - \ldots) : 7 = \ldots : 7 - 1$
$7 \cdot \ldots = 0$

96
$7^2 \cdot \ldots^6 = 7^{\cdots}$
$(15)^3 = 3^3 \cdot \ldots^3$
$328^4 : \ldots^4 = 1$

Tutor!
A volte è utile usare più proprietà contemporaneamente

••• **97**
$(16)^4 = 2^{\cdots}$
$(7^5)^{\cdots} : 7^{10} = \ldots^5$
$27^{\cdots} : 3^2 = (3^2)^{\cdots}$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

98 $21 + 7 - 3$

99 $11 - 7 + 4 - 5$

• **100** $13 + 2 - 8 - 3$ [4]

• **101** $15 + 7 - 3 + 5 - 14 + 9$ [19]

• **102** $91 - 19 + 24 - 2 - 3 - 4 + 1$ [88]

• **103** $13+9-11+45-7+60-47-3+3$ [62]

ESERCIZIO SVOLTO

104 $53 - \{8 - [7 - (45 - 38 - 2) + 2] - (11 - 7)\} - 24$

Svolgiamo prima le operazioni indicate all'interno delle parentesi tonde.

$53 - \{8 - [7 - 5 + 2] - 4\} - 24 =$

svolgiamo ora i calcoli all'interno delle parentesi quadre:

$= 53 - \{8 - 4 - 4\} - 24 =$

eseguiamo infine le operazioni indicate all'interno delle parentesi graffe:

$= 53 - 0 - 24 =$

eseguiamo le operazioni restanti e scriviamo il risultato:

$= 53 - 24 = 29$

• **105** $34-[21+(7-3+5-2)]-4+1$ [3]

• **106** $2+(7-3)-[12-(7+4)]-3$ [2]

• **107** $[2 + (7 - 3)] \times 4 + 1$ [25]

• **108** $[9 - (2 + 3) + (7 - 3) : 2] \times 3$ [18]

• **109** $5 + 12 : 3 + 7 - 18 : (2 + 2 \times 2)$

• **110** $(3 + 12) \times (7 - 2) - 18 : (2 + 4) - 5 \times (7 - 3) + 12 - 2 \times 7$

• **111** $\{2 + [(3 + 7) \times (15 - 2) - 12 : (11 - 5)]\} - (3^2 + 2^5)$

• **112** $[(13 - 12 : 4) \times (3^2 - 8 : 2) - 5 \times 6 - 5] : (4^2 - 2 - 3 \times 3)$

• **113** $101 - \{[(110 : 2) : 11] \times (10 + 4 \times 2) + 7\} + [8 \times (20 : 5 - 1) - 3 \times 3] : 5$ [7]

• **114** $2^2 - 3 \times \{2 - [(16 - 8 + 3 - 6) + 22 : (13 - 2)]\} - 3 \times 2$ [13]

• **115** $2^3 + 2 \times 3 + 12 - (2 \times 10 : 2^2) + 15 : 5 - 5$ [19]

ESERCIZIO SVOLTO

116 $5^{11} : 5^7 \times 5^2$

Ricordando che $a^n \times a^m = a^{n+m}$ e $a^n : a^m = a^{n-m}$ (con $n > m$), si ha:

$5^{11} : 5^7 \times 5^2 = 5^{11-7} \times 5^2 = 5^4 \times 5^2 = 5^{4+2} = 5^6$

• **117** $7^5 : 7^3 - 2^2 \times 2^3 - (5 + 6^4 : 6^2 : 6) + [3 \times 2^3 - 5 \times 4 - 1] : 3$ [7]

• **118** $3 \times \{(7 - 4)^3 : 3^2 + [3^2 + 10 \times (2^3 + 1)] : 11 - (6^5 : 6^3 \times 2 - 7 \times 3^2) : 3^2\} - 15$ [18]

• **119** $[(2^2)^3 \times 3^6] : 6^4 - \{12^7 : [(3^2)^2 \times 4^4] : 12^2 - 3^2\} - (5^5 : 5^4)^2$ [8]

• **120** $(6^3 \times 4^3) : 8^3 \times \{10^7 : [(5^3)^2 \times 2^6] : (5^2)^0 - 6^2 : 2^2\} - 12^4 : 3^4 : (2^2)^2$

• **121** $(7^3)^4 \times (7^2)^5 \times (7^0)^6 : [(7^3)^2 \times (7^4)^0 \times (7^5)^2]$ [7^6]

• **122** $(3^3)^7 \times (3^4)^5 \times (3^2)^5 : \{(3^2)^2 \times (3^4)^0 \times [(3^3)^2]^3\}^2$ [3^7]

• **123** $\{(6^6)^4 : (6^7)^0 \times [(6^2)^3]^2\}^2 : \{[(6^3)^5 \times (6^2)^3]^3 : [(6^3)^3]^4\}^2$ [6^{18}]

Tutor!
Ricorda: $(a^n)^m = a^{n \times m}$;
$(a \times b)^n = a^n \times b^n$;
$(a : b)^n = a^n : b^n$

ESERCIZIO SVOLTO

124 $(9^2)^3 : (3^5)^2 \times 27^2$

Sapendo che $9 = 3^2$ e $27 = 3^3$, possiamo riscrivere l'espressione nel modo seguente:

$[(3^2)^2]^3 : (3^5)^2 \times (3^3)^2 = 3^{2\times2\times3} : 3^{5\times2} \times 3^{3\times2} = 3^{12} : 3^{10} \times 3^6 = 3^{12-10+6} = 3^8.$

• **125** $\{(9^2)^6 \times 27^4 : [(3^2)^5]^3\}^3 : \{[(3^3)^2 \times 27^3]^5 : [(9^2)^3]^5\}$ [3^3]

• **126** $[(8^2)^3 : 16^4 \times (2^2)^3]^4 : \{[(4^4)^2 \times 2^5]^3 : [(32^2)^3]^2\}^4$ [2^{20}]

• **127** $(9^2)^0 \times (7^4)^2 : 7^6 - \{(10^3)^4 : (4^3)^2 - [(5^3)^2 \times 4^3 : 64]^2\}^5$ [7^2]

• **128** $(7^2 \times 3)^6 \times 81 : [21^3 \times (3^2 \times 7^3)^3 : 7]$ [21]

• **129** $25 \times (5^2)^3 : 25 - \{5^{11} : [(5^2)^2 \times 25^2]\}$ [0]

•• **130** $\{(4^2)^4 \times (9^4)^2 : 36^8 + [(16^3)^4 : (4^{10})^2 \times (5^4)^2 : 2^8]^2 - [(3^2 \times 2^2)^3 : 6^6] \times (5^4)^4\}^7$ [1]

•• **131** $[2^3 + 7 \cdot (49 - 21)^4]^0 - [3^3 - 3 \cdot (8 + 8^0)]^4$ [1]

•• **132** $\{[4 + 2 \cdot (7 + 41^2)] \cdot (41 - 19)\}^0$ [1]

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

133 La divisione è un'operazione in $\mathbb{N}$. V F

134 La differenza di due qualsiasi numeri naturali è un numero naturale. V F

•• **135** Se l'ultima cifra di un numero è 7, esso non è un quadrato perfetto. V F

•• **136** Dati tre numeri naturali non nulli a, b, n, vale la relazione: $a^n + b^n = (a + b)^n$. V F

• **137** L'uguaglianza 10 + 11 + 9 = 10 + 20 è valida per la proprietà commutativa dell'addizione. V F

• **138** Applicando la proprietà della potenza di un prodotto si ha $(3 \cdot 4)^2 = 9 \cdot 16$. V F

• **139** Applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione si ha $a \cdot (b + c) = ab + c$. V F

3. Numeri primi e divisibilità

140 Scrivi almeno sei multipli del numero 6.

141 Scrivi almeno due divisori del numero 60.

142 Write two divisors of the number 24.

Nelle seguenti coppie di numeri stabilisci se uno è multiplo dell'altro.

143 15 75

• **144** 27 243

• **145** 39 132

• **146** 111 33

• **147** 276 46

• **148** 169 13

Nelle seguenti coppie di numeri stabilisci se uno è divisore dell'altro.

149 29 145

150 37 629

• **151** 13 196

• **152** 2337 57

• **153** 273 21

Tutor!
Per capire se *m* è divisore di *n* moltiplica *m* per 1, 2, 3, e così via finché non trovi un risultato uguale a *n* (è un divisore) o maggiore di *n* (non è un divisore).

Risolvi.

• **154** Tra i seguenti numeri, ve ne sono due che non sono divisori di 60. Individuali.
4 6 10 16 20 24 30

• **155** Tra i seguenti numeri, ve ne sono due che non sono multipli di 7. Quali?
14 21 27 42 77 107 147 500

• **156** Quanti sono i naturali multipli di 3?

• **157** Quanti multipli di 3 ci sono tra i primi 100 numeri naturali?

• **158** Determina quanti sono i numeri pari compresi tra:
- 10 e 20
- 10 e 30
- 10 e 100
- 21 e 77
- 33 e 88
- 55 e 15

• **159** Determina quanti sono i multipli di 5 compresi tra:
- 1 e 49
- 10 e 72
- 12 e 106
- 21 e 177
- 4 e 60
- 1 e 101

• **160** Quali, tra i numeri naturali 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, sono numeri primi?

• **161** Di ciascuno dei numeri primi di seguito riportati, determina il numero primo che lo precede e il numero primo che lo segue: 7, 13, 29, 31.

• **162** Quali, tra i numeri naturali 2, 21, 211, 2 111, 21 111, sono numeri composti?

• **163** List all the prime numbers lower than 100. How many are they?

•• **164** Scrivi almeno cinque numeri primi, scelti a piacere, maggiori di 4 e verifica che ciascuno di essi diventa divisibile per 6 togliendogli oppure aggiungendogli 1.

•• **165** Spiega perché ciascuna delle seguenti affermazioni è vera.
- Se un numero *n* è multiplo di 12, allora è anche multiplo di 3.
- Tutti i divisori di 60 sono anche divisori di 240.
- Esiste almeno un divisore di 60 che non è divisore di 90.
- Il quadrato di un numero primo non è un numero primo.

●● **166** I numeri 2 e 3 sono primi consecutivi. Spiega perché non ci sono altre coppie di numeri primi consecutivi.

●● **167** Per dimostrare che un numero n è primo è sufficiente dimostrare che non è divisibile per i primi minori o uguali a ...

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

● **168** I numeri primi sono tutti dispari. V F

● **169** Il successivo di un numero primo non è mai un numero primo. V F

● **170** Esistono numeri naturali che non hanno divisori. V F

171 Se a e b sono due numeri naturali, allora b è divisibile per a solo se b ha tra i suoi divisori tutti i divisori di a. V F

● **172** Il prodotto di due numeri primi qualsiasi è dispari. V F

173 Ogni multiplo pari di 7 è divisibile per 14. V F

4. Scomposizione in fattori primi

Stabilisci se le seguenti scomposizioni sono in fattori primi e, se non lo sono, trasformale in scomposizioni in fattori primi.

● **174** $20 = 4 \times 5$

● **175** $18 = 2 \times 3 \times 3$

ESERCIZIO SVOLTO

176 $60 = 2 \times 5 \times 6$

I fattori della scomposizione sono 2, 5 e 6. Di questi solo 6 non è un numero primo, poiché $6 = 2 \times 3$. Nella scomposizione data, sostituiamo a 6 la sua fattorizzazione e in questo modo otteniamo $60 = 2 \times 5 \times 2 \times 3$. Infine, raggruppando i fattori uguali, arriviamo alla seguente scomposizione: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.

● **177** $990 = 2 \times 5 \times 9 \times 11$

● **178** $2\,717 = 11 \times 13 \times 19$

● **179** $36\,465 = 11 \times 13 \times 15 \times 17$

● **180** $10\,395 = 3^2 \times 5 \times 11 \times 21$

●● **181** $1\,564 = 2^2 \times 391$

●● **182** $365\,011 = 53 \times 71 \times 97$

Risolvi.

● **183** Determina tutti i divisori del numero 69 069.

●● **184** Completa la scomposizione in fattori primi (puoi farlo con ragionamento veloce).

$100 = (\ldots)^2 \times (\ldots)^2$ $\quad$ $324 = (\ldots)^2 \times (\ldots)^4$

$400 = (\ldots)^4 \times (\ldots)^2$ $\quad$ $450 = \ldots \times (\ldots)^2 \times (\ldots)^2$

●● **185** Completa la scomposizione in fattori primi.

$126 = 2 \times (\ldots)^2 \times 7$ $\quad$ $1\,001 = 7 \times \ldots \times \ldots$

$200 = 2^{\cdots} \times 5^{\cdots}$ $\quad$ $999 = 3^{\cdots} \times \ldots$

Scomponi in fattori primi i seguenti numeri naturali.

- **186** 16
- **187** 30

ESERCIZIO SVOLTO

188 33

Osserviamo che la somma delle cifre è uguale a 6, e quindi il numero dato è divisibile per 3. Dividendo per 3 si ha $33 : 3 = 11$, da cui deduciamo che $33 = 3 \times 11$. Poiché entrambi i fattori sono primi, questa è la scomposizione cercata.

- **189** 40
- **190** 153
- **191** 37
- **192** 84
- **193** 144
- **194** 178
- **195** 280
- ●● **196** 588
- ●● **197** 1 650
- ●● **198** 14 400

Utilizzando la scomposizione in fattori primi, stabilisci se nelle seguenti coppie di numeri uno è divisore dell'altro.

199	46	16	**203**	1 794	46
200	60	15	**204**	1 672	209
201	66	9	**205**	867	22 287
202	792	44	**206**	1 024	254

Tutor!

Dopo aver scomposto non guardare solo i fattori primi ma anche gli esponenti.

Determina i fattori primi comuni ai seguenti gruppi di numeri interi.

207	55	15	**209**	792	156	**211**	10 557	6279
208	8	24	**210**	4 004	676	**212**	2 808	624

Trova tutti i divisori dei seguenti numeri e usali per scrivere ciascun numero come prodotto di due fattori.

ESERCIZIO SVOLTO

213 36

I divisori di 36 sono i seguenti:

1 2 3 4 6 9 12 18 36

Le seguenti coppie di numeri hanno tutte come prodotto 36:

(1, 36) (2, 18) (3, 12) (4, 9)

Il fattore 6 può essere utilizzato solo se ripetuto.

- **214** 30
- **215** 48
- **216** 75
- **217** 81
- **218** 25
- **219** 60

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

220 Se due numeri naturali a, b sono uguali hanno la stessa scomposizione in fattori primi. V F

• **221** La somma di due numeri primi è ancora un numero primo. V F

• **222** Se due numeri non hanno fattori primi in comune, sicuramente uno dei due è pari. V F

• **223** Esistono numeri composti che non possono essere scomposti in fattori primi. V F

• **224** Se 3 non è un fattore primo di a, allora a è pari. V F

•• **225** Se due numeri naturali a e b sono sottomultipli di un numero naturale n allora questo è divisibile per il prodotto $a \cdot b$. V F

5. Massimo comune divisore

Trova i divisori comuni delle seguenti coppie di numeri naturali.

226 36 30

227 60 35

228 77 84

229 24 42

230 25 125

•• **231** 0 24

Calcola il MCD delle seguenti coppie di numeri naturali.

• **232** 9 24

• **233** 30 42

• **234** 144 72

ESERCIZIO SVOLTO

235 24 588

Scomponiamo i due numeri in fattori primi: $24 = 2^3 \times 3$ e $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.
Prendiamo ora i numeri primi presenti in entrambe le fattorizzazioni con il loro esponente minimo e moltiplichiamoli tra loro, ottenendo così il MCD dei due numeri dati:

$$\text{MCD}(24, 588) = 2^2 \times 3 = 12$$

236 10 4 [2]

237 36 24 [12]

• **238** 85 102 [17]

• **239** 56 63 [7]

• **240** 66 55 [11]

• **241** 117 78 [39]

• **242** 276 460 [92]

•• **243** 546 510 552 [6]

•• **244** 234 208 286 [26]

•• **245** 252 476 644 770 [2]

Scrivi tre numeri naturali che abbiano come MCD il numero dato.

• **246** 3

• **247** 5

• **248** 8

• **249** 1

• **250** 38

• **251** 17

Per ciascuna delle seguenti coppie di numeri naturali determina, se esiste, un numero $z \neq y$ tale che MCD$(x, z) = y$.

•• **252** $x = 6 \quad y = 1$

•• **253** $x = 2 \quad y = 2$

•• **254** $x = 8 \quad y = 4$

•• **255** $x = 12 \quad y = 3$

•• **256** $x = 26 \quad y = 13$

•• **257** $x = 38 \quad y = 17$

•• **258** $x = 210 \quad y = 1$

•• **259** $x = 54 \quad y = 54$

•• **260** $x = 180 \quad y = 35$

Determina il numero naturale più piccolo che soddisfa ciascuna uguaglianza.

•• **261** MCD$(12, \ldots) = 3$
MCD$(\ldots, 21) = 7$
MCD$(120, \text{MCD}(150, \ldots)) = 30$

•• **262** MCD$(8, \ldots) = \text{MCD}(12, \ldots)$
MCD$(15, \ldots) = \text{MCD}(24, \ldots)$
MCD$(\ldots, \text{MCD}(21, 35) = \text{MCD}(\ldots, 14)$

Risolvi.

•• **263** Dimostra che, se m è un divisore di n, allora MCD$(m, n) = m$.

•• **264** Raggruppa i seguenti numeri naturali in coppie tali che ogni coppia abbia un MCD diverso e la somma di questi ultimi sia massima: 8, 39, 48, 49, 130, 77, 221, 120.

•• **265** Spiega con parole tue perché il numero naturale più piccolo che soddisfa la relazione MCD$(a.....) = b$ è sempre b.

Stabilisci se le coppie seguenti sono formate da numeri primi tra loro (coprimi).

266 35 60 | **267** 24 35 | • **268** 28 57 | • **269** 42 55

• **270** Completa la tabella indicando tutte le coppie di numeri coprimi.

	25	36	75	100	101	145
12	×				×	×
30						
39						
77						
245						

Tutor!
Due numeri possono essere primi fra loro senza essere primi.

•• **271** Find four non prime numbers which are prime with 60.

Risolvi i seguenti problemi.

NELLA REALTÀ

• **272** Il signor Mario dispone di un certo numero di pali di legno di tre diverse lunghezze, 168 cm, 252 cm e 420 cm, che decide di tagliare per ricavare paletti tutti della stessa lunghezza per recintare il suo giardino. Se vuole evitare sprechi e vuole che i paletti ricavati siano più lunghi possibile, quanto dovrà essere lungo ciascun paletto? [84 cm]

• **273** Davide e Mattia ogni mattina si danno appuntamento per correre insieme nel parco. Percorrono più volte lo stesso giro intorno al laghetto, ma Davide è più veloce e impiega 5 minuti esatti a compiere il giro, mentre Mattia impiega 7 minuti. Partono insieme dallo stesso punto e decidono di smettere di correre quando si incontrano per la seconda volta al punto di partenza. Se la corsa inizia alle ore 7.30, a che ora i due amici terminano la corsa? [8h 5′]

• **274** Un pasticciere vende amaretti in confezioni da 150 g, 180 g e 420 g. Per risparmiare tempo, produce pezzi tutti uguali e di massimo peso. Quanto pesa un singolo amaretto? [30 g]

●● **275** Per ciascuna delle seguenti affermazioni determina una terna (a, b, c) di numeri per le quali l'affermazione non è valida.

- Se $\text{MCD}(a, b, c) = 1$, allora a e c sono coprimi.
- Se due numeri naturali a e b sono entrambi divisibili per c, allora $\text{MCD}(a, b) = c$.
- La somma di tre numeri primi consecutivi, a, b e c, è un numero composto.

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

276 Due numeri sono coprimi se il loro MCD è 1. V F

● **277** Se due numeri sono pari, allora il loro MCD è 2. V F

● **278** Dividendo due numeri per il loro MCD si ottiene sempre lo stesso risultato. V F

● **279** Non sempre si può determinare il MCD di una terna di numeri naturali diversi da zero. V F

● **280** Il MCD di due numeri consecutivi è sempre 1. V F

● **281** Il MCD di un numero pari e di un numero dispari è 1. V F

6. Minimo comune multiplo

Per ciascun gruppo di numeri, determina almeno due multipli comuni.

282 10 15

283 5 4

● **284** 12 36

● **285** 15 18

● **286** 17 2 8

● **287** 23 24 6

Calcola il mcm dei seguenti gruppi di numeri naturali.

288 16 20

289 12 9

290 24 36

ESERCIZIO SVOLTO

291 36 90

Scomponiamo i due numeri in fattori primi: $36 = 2^2 \times 3^2$ e $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.
Prendendo ora i numeri primi comuni e non comuni con il loro esponente massimo e moltiplicandoli tra loro, otteniamo il mcm dei due numeri dati: $\text{mcm}(36, 90) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

292 21 14

● **293** 25 49

● **294** 26 52

● **295** 120 150

● **296** 10 4

● **297** 36 24

● **298** 140 150

● **299** 600 63

• **300**	$21 \cdot 7$	$15 \cdot 2^2$
• **301**	$3^2 \cdot 5^2$	9
•• **302**	25^0	347
•• **303**	$19 \cdot 25$	$19 \cdot 31^0$

• **304**	18	9	36
• **305**	4	12	18
• **306**	10	15	25
• **307**	210	70	30

Stabilisci per quali delle seguenti coppie il mcm è dato dal prodotto dei due numeri.

• **308**	$2^3 \cdot 5^2$	$3^4 \cdot 75\,036$
• **309**	65	115
• **310**	100	49
• **311**	250	1 250
• **312**	1 000	$3^{10} \cdot 11$

Tutor!

Se trovi una regola generale, prova a dimostrarla. Se ci riesci, sei sicuro di poterla usare sempre.

Per ciascuna delle seguenti coppie x e y, determina, se esiste, un numero z tale che mcm $(x, z) = y$.

•• **313**	$x = 3$	$y = 6$
•• **314**	$x = 2$	$y = 10$
•• **315**	$x = 6$	$y = 18$
•• **316**	$x = 21$	$y = 28$
•• **317**	$x = 1$	$y = 37$
•• **318**	$x = 177$	$y = 177$

Scrivi tre numeri naturali che abbiano come mcm il numero dato.

• **319** 12 | • **320** 30 | • **321** 66 | • **322** 100 | • **323** 75

•• **324** Il mcm di due numeri a, b è dato dal prodotto di tre numeri primi. Scrivi tutte le possibili coppie di numeri a, b.

•• **325** Dimostra che, se m è un divisore di n, allora $\text{mcm}(m, n) = n$.

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

•• **326**	Se $\text{mcm}(x, y) = z$, allora $z : x = y$.	V	F
•• **327**	Se due numeri sono coprimi, allora il loro mcm è dato dal loro prodotto.	V	F
•• **328**	Se $x = 3y$, allora $\text{mcm}(x, y) = x$.	V	F
•• **329**	Il mcm di un numero dispari e di un numero pari è pari.	V	F
•• **330**	Il mcm non può essere un numero primo.	V	F
•• **331**	Il mcm di due numeri consecutivi non nulli è dato dal loro prodotto.	V	F

7. Numeri interi

Esprimi usando i numeri interi, le seguenti situazioni che riguardano grandezze orientate.

332 Una montagna è alta 1 450 metri; un abisso marino è profondo 3 500 metri.

333 Alessandro Magno morì nel 323 a.C.; Carlo Magno fu incoronato imperatore nell'anno 800 d.C.

334 Quest'anno un'azienda ha avuto un deficit di € 93 274, mentre l'anno scorso aveva realizzato un attivo di € 55 843.

335 La temperatura media all'interno di un frigorifero è di 4 gradi sopra zero, la temperatura media all'interno di un congelatore è di 18 gradi sotto zero.

Risolvi.

336 Determina gli opposti dei seguenti interi:
22, -13, 5, 1, -9, 0, -7.

337 Determina il valore assoluto degli interi dell'esercizio precedente.

338 Rappresenta i seguenti numeri interi sulla retta orientata: 2, -3, 4, 0, 1, -6, -5, 10, -12.

339 Disponi in ordine crescente i seguenti numeri interi: 2, -3, -11, 5, 1, -13, 7, 0, -6, 3.

340 Disponi in ordine decrescente i seguenti numeri interi: 1, -7, 13, -9, 2, 0, 4, -12, -1, 5, -6.

• **341** How many integers are there between -12 and 5?

• **342** Sostituisci ai puntini dei numeri interi in modo che siano verificate le disuguaglianze:

- $-12 < \ldots\ldots < \ldots\ldots < -2 < \ldots\ldots < 0 < \ldots\ldots < \ldots\ldots < 9$
- $9 > \ldots\ldots > 2 > \ldots\ldots > \ldots\ldots > \ldots\ldots > -3 > \ldots\ldots > -7$

• **343** Scrivi tutti i numeri interi che, scritti al posto dei puntini, rendono vere le disuguaglianze.

$5 < |\ldots| < 7$ $\qquad 9 < |\ldots| < 11$ $\qquad 6 \leq |\ldots| < 8$

• **344** Inserisci al posto dei puntini i numeri -6, -5, 5 e 6, in tutti i modi possibili, in modo da rendere vera la disuguaglianza $|\ldots| < |\ldots|$.

• **345** Elenca e rappresenta sulla retta orientata tutti i numeri interi di valore assoluto 2, 3, 5, 6, 7, 12.

•• **346** Se a è un intero, allora il numero $-a$ è sempre negativo? E $-|a|$ è sempre negativo?

•• **347** Dati due numeri interi possiamo sempre affermare che il maggiore dei due è quello che ha maggiore valore assoluto?

•• **348** Descrivi tutti i numeri interi che verificano la disuguaglianza $-6 < |\ldots\ldots|$.

•• **349** Quali sono i numeri interi che verificano $|\ldots\ldots| < 0$?

•• **350** Ci sono numeri interi minori del proprio valore assoluto? Se sì, quali?

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

351 Zero è un numero positivo. V F

• **352** Un numero intero positivo ha modulo sempre maggiore di quello di ogni intero negativo. V F

• **353** Un numero intero è sempre maggiore del suo opposto. V F

• **354** Ogni intero positivo è maggiore di ogni intero negativo. V F

• **355** Sulla retta orientata tra un intero negativo e uno positivo c'è sempre lo zero. V F

• **356** L'opposto dell'opposto di un numero intero è il numero di partenza. V F

8. Addizione e sottrazione di numeri interi

Scrivi l'addizione e calcola la somma dei seguenti gruppi di numeri interi.

357 $+2 \quad +5$

358 $-2 \quad -3$

359 $-6 \quad +4$

• **360** $+5 \quad -7 \quad -3$

• **361** $+3 \quad -9 \quad -14$

• **362** $+21 \quad +32 \quad -18$

• **363** $-11 \quad +19 \quad -3 \quad -24$

• **364** $+13 \quad -17 \quad -6 \quad +11$

• **365** $-21 \quad -8 \quad -3 \quad +41$

Calcola la differenza delle seguenti coppie di numeri interi.

366 $+7 \quad +5$

• **367** $-4 \quad -2$

• **368** $+9 \quad -14$

• **369** $+11 \quad +5$

• **370** $-6 \quad -1$

• **371** $-13 \quad +8$

• **372** $+19 \quad -7$

• **373** $-24 \quad +14$

• **374** $+31 \quad +32$

• **375** $-29 \quad -24$

Tutor!

Ricorda: per calcolare la differenza addiziona al primo numero l'opposto del secondo.

Riscrivi le seguenti espressioni senza usare le parentesi.

376 $(+1) + (-a) + (+b) \qquad (-2) - (-a) - (+b)$

377 $(+a) + (+b) - (+c) \qquad (+a) - (+b) - (+c)$

378 $(-a) - (-b) - (-c) \qquad (+a) - (+b) + (-c)$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

• **379** $(+2) + (-8) - (-3)$ [-3]

• **380** $(-6) - (+3) - (-7)$ [-2]

• **381** $(-2) + (-7) - (+3)$ [-12]

• **382** $(-21) - (-3) + (-72)$ [-90]

• **383** $(+9) + (-6) + (-2)$ [1]

• **384** $(-3) - (-6) + (-3)$ [0]

• **385** $(-13) - (-14) - (-1)$ [2]

• **386** $(-42) + (-24) + (-13)$ [-79]

• **387** $(+8) - (-75) - (-17)$ [100]

• **388** $(-19) + (-23) + (+16) + (-9)$ [-35]

• **389** $(-20) + (-13) - (+6) - (+8)$ [-47]

• **390** $(+19) + (-15) - (-3) - (+1) - (-7)$ [13]

• **391** $(-12) + (+10) - (-9) + (-14) + (-7)]$

• **392** $(-23) + (+5) + (-39) - (-17) - (-12)$

• **393** $(-31) - (-23) + (-8) + (-83) - (33) - (+17)$

• **394** $(-3) + (-36) - (+14) + (-7) - (-3) + (-111)$

ESERCIZIO SVOLTO

395 $(+2) - [(-8) - (-11)]$

Svolgiamo prima l'operazione all'interno delle parentesi quadre: $(-8) + (+11) = +3$. L'espressione diventa $(+2) - [+3] = (+2) + [-3] = -1$ e quindi il risultato dell'espressione di partenza è -1.

•• **396** $(-6) - [(+3) - (+7)]$ [-2]

•• **397** $(+11) + (+7) + [(-28) + (-3) + (33) + (+3)]$ [23]

●● **398** $(-3)+[6+(12+4)+(-1)+(-3)]+41$ [56]

●● **399** $[(-3)+(-7)]-[(-5)+3-(+5)]$ [−3]

●● **400** $-[-(2-3)+(5-9)]-(3-5)$ [5]

●● **401** $10+(-13)+\{27+[(-8)+(+19)+(-43)]+(-12)+(+50)\}$ [30]

●● **402** $36+(-17)+\{(-1)+(+3)+[98+11+(-100)]+63+(-9)\}+(-37)$ [47]

●● **403** $24-\{12-[28-(3-24)-(4-1)+3]+28\}$ [33]

●● **404** $7-5+[-3+(-1)]-35+7-\{-[-(-7-18)]+19\}$ [−24]

●● **405** $65-(-51)-5-\{-1-[7+(-2-11)+63+(-35+21)]+37-28\}$ [146]

●● **406** $(14-11)^2-[(5-12)-(10-23)]^2$ [−27]

●● **407** $\{[(12-8)-(-3-2)]-(16-6)^2+(-63+4^3)\}-2$ [−92]

●● **408** $60-[-(12+45-21)+(21-29-12)]-(37+23-8)^0$ [115]

Risolvi i seguenti problemi

NELLA REALTA'

● **409** All'inizio di una settimana, in una cisterna di un distributore di benzina ci sono 5 000 litri. Durante la settimana si effettuano i seguenti movimenti:

Lunedì: vendita di 3 425 litri e rifornimento di 8 000 litri
Martedì: vendita di 2 743 litri
Mercoledì: vendita di 1 655 litri
Giovedì: vendita di 2 897 litri
Venerdì: rifornimento di 10 000 litri e vendita di 3 212 litri
Sabato e Domenica: vendita di 4 116 litri

Quanta benzina sarà presente nella cisterna il successivo lunedì? [4 952 litri]

● **410** Durante una giornata, un uomo mediamente acquisisce o spende le seguenti calorie:

360 calorie per colazione
540 calorie per 2 ore di passeggiata veloce
930 calorie per pranzo
725 calorie per attività in palestra
950 calorie per cena.

Calcola il bilancio energetico della giornata. [+975 calorie]

●● **411** Una pulce salta alternativamente avanti e indietro sulla linea dei numeri. Parte da 0 e con il primo salto si porta direttamente sul 10. Ogni salto successivo la lunghezza si riduce di una unità. Dopo 5 salti in che posizione si troverà la pulce? Dopo quanti salti arriverà nella posizione 5? [8, 10]

Risolvi.

●● **412** Scrivi tre coppie di interi concordi e tre di interi discordi la cui somma sia 28.

●● **413** Inserisci in ogni cella vuota un opportuno numero intero in modo tale che la somma per ciascuna riga e ciascuna colonna sia uguale a 0.

3		−7		0
	3	7		0
5		−8	−2	0
	−6		2	0
0	0	0	0	

●● **414** Completa la tabella in modo che le somme per riga o per colonna siano uguali a 0, inserendo opportuni numeri interi presi nel seguente insieme: $\{-1,\ 1,\ -3,\ 3,\ -6,\ 6,\ -8,\ 8,\ -9,\ 9\}$

			0
	5	−2	0
2			0
0	0	0	

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

● **415** La somma di due numeri interi è sempre un numero naturale. V F

● **416** La somma di un intero positivo e di uno negativo è sempre positiva. V F

● **417** È sempre possibile trasformare la sottrazione di due interi in un'addizione. V F

●● **418** Sommando due interi distinti e con lo stesso modulo si ottiene sempre zero. V F

●● **419** La somma dei valori assoluti di due interi opposti è sempre nulla. V F

9. Moltiplicazione e divisione di numeri interi

420 Indica quali parentesi si possono eliminare nella moltiplicazione seguente:

$$[(11) \times (6)] \times (-3) \times (-4)$$

421 La moltiplicazione $(+7) \times -3$ è scritta correttamente? Se no perché?

Stabilisci il segno del prodotto in base al segno dei fattori.

422 $(+3) \times (+1)$

423 $(+2) \times (-4)$

424 $(+7) \times (-5) \times (-10)$

● **425** $(-3) \times (-2) \times (+15) \times (-7)$

● **426** $(+5) \times (-9) \times (-13) \times (17) \times (-11) \times (+133)$

● **427** $(-3) \times (-4) \times (-5) \times (+5) \times (+4) \times (+3)$

●● **428** $(-11) \times (-7) \times (-5) \times (+44) \times (-34) \times (+31) \times (-99) \times 0$

Tutor!

Il segno di un prodotto non dipende dai valori assoluti dei fattori, a meno che uno di questi non sia lo 0.

Esegui le seguenti moltiplicazioni.

429 $(+4) \times (+5)$

430 $(+6) \times (-2)$

431 $(+2) \times (-4) \times (-7)$ [56]

• **432** $(-3) \times (+5) \times (+8) \times (-1)$ [120]

• **433** $(-10) \times (-20) \times (+2) \times (-5) \times (-7)$ [14 000]

• **434** $(+4) \times (-9) \times (-7) \times (-13) \times (+11) \times (-17)$ [612 612]

• **435** $(-1) \times (+12) \times (-21) \times (-3) \times (+4) \times (-1) \times (+7)$ [21 168]

Tutor!

Dopo aver determinato il segno, usa la proprietà associativa per calcolare il valore assoluto del prodotto più velocemente.

Risolvi.

ESERCIZIO SVOLTO

436 Il prodotto di due numeri interi, a e b, è -72 e il secondo è doppio del primo in valore assoluto. Individua i due numeri.
Il problema può essere risolto esaminando tutte le scomposizioni di 72 in due fattori. Si ha:
$2 \cdot 36 \qquad 3 \cdot 24 \qquad 4 \cdot 18 \qquad 6 \cdot 12 \qquad 8 \cdot 9$
Vi sono due soluzioni: $a = -6$ e $b = 12$ oppure $a = 6$ e $b = -12$.
Questo stesso problema si risolve utilizzando la scomposizione in fattori primi. Osserviamo infatti che:
$72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)$, da cui le soluzioni.

•• **437** Determina due numeri interi, a e b, tali che il loro prodotto sia 50 e uno dei due sia doppio dell'altro.

•• **438** Determina due numeri interi di segno opposto, a e b, tali che il loro prodotto abbia valore assoluto 338 e il primo sia doppio del secondo in valore assoluto.

•• **439** Determina due numeri interi di segno concorde, a e b, tali che il loro prodotto sia 882 e uno dei due sia metà dell'altro.

•• **440** Determina due numeri interi di segno concorde, a e b, tali che il loro prodotto sia 147 e uno dei due sia il triplo dell'altro.

•• **441** Find two integers whose sum is 3 and whose product is -10.

Semplifica le seguenti espressioni.

442 $(-9)(+2) \quad (-9)(-2) \quad (+9)(-2)$

443 $(-1)(-3)(-7)(-1)$ [21]

• **444** $(1 + 3 - 6)(+4 - 5 + 6)(-4 + 3)$ [10]

• **445** $(2 - 5)(3 + 4 - 8 - 1)(-7 + 11 - 1)$ [18]

• **446** $[(-3)(+7) - (-3)8 - 8][(-2)(-3) - 5]$ [-5]

• **447** $[(-4)(+9) + (-5)(-7)][18 - (+3)(-2) + 3(-7)]$ [-3]

Tutor!

Quando due parentesi sono affiancate devi eseguire la moltiplicazione.

•• **448** Determina i valori di a che rendono nullo il prodotto $(-7 + a)(5 - a + 4)$.

•• **449** Di tre numeri a, b, c, si sa che sono concordi e che il loro prodotto è negativo. I tre numeri sono positivi o negativi?

•• **450** Il prodotto di un certo numero di fattori è negativo. I fattori negativi sono in numero pari o in numero dispari?

•• **451** Il prodotto di un numero intero a per il suo successivo $a + 1$ può essere negativo?

Esegui, se possibile, le seguenti divisioni in $\mathbb{Z}$.

452 $(+8) : (+2)$

453 $(+6) : (-3)$

• **454** $(12) : (-4) : (-3)$ [1]

• **455** $(-36) : (+2) : (-2) : (-9)$ [−1]

• **456** $(-100) : (-5) : (+2) : (-5) : (+4)$ [impossibile]

• **457** $(+144) : (-3) : (-2) : (+2) : (-3) : (3)$ [impossibile]

• **458** $(-150) : (-5) : (-2) : (-1) : (+3) : (-2) : (-1)$ [impossibile]

Tutor!
In $\mathbb{Z}$ puoi eseguire la divisione solo se il dividendo è multiplo del divisore.

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

459 $(-16) : (+4)$

460 $(-16) : (-4)$

461 $(+16) : (-4)$

• **462** $(24 - 16 + 12) : (-4)$ [−5]

• **463** $(-14 + 10 + 9 - 11) : (-2)$ [3]

• **464** $[(-7)(-8)(-3)] : (-2)$ [84]

• **465** $[(-15)(+6)(-4)] : (-12)$ [−30]

•• **466** $\{[(-3+5-2):(-12)]:(-18)\}:(-24)$ [0]

Risolvi.

467 Quali fra questi sono numeri negativi?

$(-3)^4$ $(+4)^3$ $(-7)^8$ $(+7)^4$

$-(-5)^3$ $-(-20)^{80}$ $+(-20)^{80}$ $(-5)^0$

• **468** Se a è un numero intero positivo, quale tra queste affermazioni è quella vera?

- $(-a)^7$ è un numero positivo.
- $(-a)^5$ non si può calcolare perché la base è negativa e l'esponente dispari.
- $(-a)^5$ è negativo.
- $(a)^3$ è negativo.

• **469** Indica quali fra le seguenti uguaglianze sono vere.

$(-37)^7 = (+37)^7$ $(+46)^6 = -(46)^6$ $(+101)^4 = (-101)^4$ $(+75)^3 = -(-75)^3$

Completa le seguenti uguaglianze.

470 $56^3 = (...56)^3$ $(-37)^7 = ...37^7$

• **471** $77^4 = (-77)^2 \times (.....)^2$ $(-56)^6 = (...56)^3(...56)^{\cdots}$

• **472** $(-66)^9 = (...66)^{11} : (...66)^{\cdots}$ $(-115)^{23} = (-115)^{\cdots} : (+115)^{\cdots}$

Calcola le seguenti potenze di numeri interi.

• **473** $(+2)^3$ $(-2)^3$

474 $(-11)^2$ $(+4)^4$

475 $(-3)^4$ $(-10)^7$

Applica, quando è possibile, le proprietà delle potenze e indica quale.

476 $(+7)^2 \times (+7)^4$

477 $(-2)^6 : (-2)^3$

• **478** $(-8)^{11} \times (-8)^4 : (-8)^{13}$

• **479** $[(+12)^7]^3$

• **480** $\{[(-13)^4]^3\}^5 : [(-13)^{12}]^3$ [13^{96}]

• **481** $(+6)^4 : (-6)^2 \times [(36)^2]^5$ [6^{18}]

• **482** $(10)^3 : (-10)^3$ [−1]

• **483** $(-14)^{13} : \{[(7)^6]^2 \times 7\}$ [-2^{13}]

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.

484 $(+9)^3 \times (+9)^2$

485 $(-5)^6 : (-5)^2$

486 $(-13)^2 \times (-13)^5 : (-13)^3$

487 $(+12)^7 : (+12)^3 \times (+12) \times (+12)^4$

488 $(-4)^{12} : (-4)^4 \times [(-4)^2]^3 : (-4)^5$

489 $[(-6)^2]^5 : (-6)^4 \times [(-4)^2 : (-4)^4]$ $[2^2 \times 3^6]$

490 $(-9)^5 \times (81)^4 : \{(-9)^7 : [(-9)^5]\} \times (-9)$ $[9^{13}]$

491 $(+11)^{15} : [(11)^6]^2 \times \{(121)^4 : [(-11)^4 \times (-11)^2] \times (-11)\} \times (-9)^5$ $[(-11)^6 \times (-9)^5]$

492 $\{[(-12)^7 \cdot (12)^5] : [(-2)^4 \cdot 3^2]\}^3$ $[-12^{30}]$

493 $(-7)^3 : \left\{-[(-10)^4 \cdot (-5)^2] : [4 \cdot (-5)^3]^2\right\}^{11}$ $[7^3]$

494 $\left\{[(-42)^3 \cdot (-42)^2]^4 : \left\{-[(-6)^6 : (-6)^2]^5\right\}\right\} : (-7)^{17}$ $[-7^3]$

Tutor!

Qualche volta può essere utile scomporre i numeri prima di calcolare le potenze.

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

495 Non si può scrivere l'operazione di prodotto di due numeri negativi senza usare le parentesi. V F

• **496** Conoscendo il prodotto di due interi, si può stabilire il segno di ciascuno. V F

• **497** Se almeno uno dei due termini di una divisione è negativo, allora il segno del quoziente è negativo. V F

• **498** Moltiplicando tra loro due interi distinti di uguale modulo si ottiene l'opposto di un quadrato. V F

• **499** Qualunque potenza con base negativa è un numero negativo. V F

• **500** Se a è un numero intero qualunque allora $a^{105} \times a^{37}$ è un numero positivo. V F

• **501** Se b è un numero negativo, allora $(b^3)^6$ è un numero positivo. V F

10. Sistemi di numerazione

Riscrivi nella numerazione romana i seguenti numeri.

502 7

503 4

504 9

• **505** 109

• **506** 156

• **507** 337

• **508** 1034

• **509** 1999

Riscrivi nel nostro sistema posizionale i seguenti numeri romani.

510 XI

511 XXIX

• **512** CCIV

• **513** $\overline{\text{V}}$MCCXVIII

• **514** MDCCXCIX

• **515** CDLXXXIV

• **516** CMLXXIV

• **517** MCMXCIX

Calcola le seguenti somme.

• **518** V + I

• **519** VI + II

• **520** IX + I

• **521** XIX + II

ESERCIZIO SVOLTO

522 X + II + II

Per determinare la somma quando gli addendi sono numeri romani, conviene passare al sistema decimale, eseguire l'addizione ed esprimere la somma in numeri romani.

X + II + II $\longrightarrow$ 10 + 2 + 2 = 14 $\longrightarrow$ XIV

- **523** MCVI + CCCL [MCDLVI]
- **524** X + XI + IX [XXX]
- **525** MCDXII + LXXXVIII [MD]
- **526** MDCLXXX + CMLXXIX [MMDCLIX]
- **527** Scrivi, nella numerazione romana, il successivo e il precedente dei seguenti numeri:

  XIII XX LXIV IX XXXII MCDL
- **528** Disponi in ordine crescente i numeri di ciascun gruppo.
  - XL LI XXXIV XXVI
  - CCXLIV CCC DX CLXXXVIII
  - CDXCIX CDXXVII CDLXIV CDLXXXV
- **529** Indica, tra i seguenti numeri romani, quali sono pari e quali dispari.

  XIV XIX LVI XCIX VIII CDXCIX

Per ciascuno dei seguenti numeri, indica il valore della cifra indicata accanto (se la cifra compare più volte nel numero, indica il valore assunto in ciascuna posizione).

530 3 625 2

531 2 563 2

532 1 203 0

533 156 987 5

534 36 635 3

Scrivi in forma polinomiale i seguenti numeri.

- **535** 324 569 605
- **536** 6 585 2 300 3 993
- **537** 2 002 102 030 100 500

Scrivi a quale numero corrisponde ciascuna espressione senza svolgere le potenze.

538 $5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$

539 $7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10$

540 $6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10$

541 $10^4 + 2 \cdot 10^2 + 4$

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

542 Un sistema di numerazione si dice additivo quando ammette l'operazione di addizione. V F

543 In un numero romano, non può comparire più di tre volte lo stesso simbolo. V F

544 In un sistema di numerazione additivo i simboli hanno sempre lo stesso valore indipendentemente dalla posizione in cui sono scritti. V F

545 Nei sistemi di numerazione posizionali è sufficiente un numero finito di simboli per scrivere tutti i numeri naturali. V F

11. Passaggi di base

Riscrivi in base *due* i seguenti numeri espressi in base *dieci*.

546 2 | **547** 4 | **548** 1 | **549** 0

ESERCIZIO SVOLTO

550 13

Dividiamo 13 per 2 ed evidenziamo il resto. Poi dividiamo il quoziente per 2 e ripetiamo il procedimento fino ad ottenere quoziente 0:

- 13 diviso 2 fa 6 con resto **1**
- 6 diviso 2 fa 3 con resto **0**
- 3 diviso 2 fa 1 con resto **1**
- 1 diviso 2 fa 0 con resto **1**

Ora, rileggendo i resti al contrario (dall'ultimo al primo) abbiamo il risultato: $13_{dieci} = 1101_{due}$

Riscrivi in base *due* i seguenti numeri espressi in base *dieci*.

- **551** 16 18 27
- **552** 29 20 36
- **553** 37 39 73
- **554** 100 125 1359

Risolvi.

555 Dati i numeri 1_{due}, 101_{due}, 1010_{due}, determina la loro scrittura in base *dieci*.

556 Completa la seguente tabella additiva per il sistema in base *due*.

+	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
0										
1	1	10	11							
10										
11							1010			
100				111						
101										
110					1010					
111										
1000									10000	
1001										

Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni nel sistema binario e verifica il risultato eseguendole nelle corrispondenti rappresentazioni nel sistema decimale.

557 $101 + 1$

558 $11 + 11$

559 $101 + 11 + 1$

- **560** $100 + 1110 - 11 + 1101010$ [1111001]
- **561** $10011 - (10 + 111) + 110 - 11$ [1101]
- **562** $11110 - [101 - (100 - 11) + 1010]$ [1000]

563 Completa la seguente tabella moltiplicativa per il sistema in base *due*.

+	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
0		0								
1		1								
10			100							
11							10010			

Esegui le seguenti operazioni nel sistema binario.

564 10×10 [$100 = 4_{dieci}$]

565 $100 : 10$ [$10 = 2_{dieci}$]

• **566** $111 + 11 \times 11$ [$10000 = 16_{dieci}$]

• **567** $110 : 10 + 1100 : 100$ [$110 = 6_{dieci}$]

• **568** $1110 : 111 \times 1000 - 11 \times 101$ [1]

•• **569** $[(11111 - 10001) \times 101 - 11] \times 1010 : 10 - 1011$ [101000100]

•• **570** $10001 - 11 \times \{[101 + 11010 : 1101 - 11] - (101 - 10)\}$ [1110]

Stabilisci se i seguenti numeri hanno significato nella base indicata e giustifica la tua risposta.

571 252692_{dieci}

• **572** 9_{cinque}

• **573** 13_{due}

• **574** 666_{sei}

•• **575** $1234567890ABC_{undici}$

•• **576** 0_{uno}

• **577** Scrivi in base *dieci* il seguente numero scritto in forma polinomiale:
$3 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 8 \times 10^0$.

• **578** Scrivi in base *dieci* i numeri scritti in forma polinomiale e calcola il valore dell'espressione:
$(3 \times 10^1 + 6 \times 10^0) + (1 \times 10^1 + 5 \times 10^0) - (4 \times 10^1 + 2 \times 10^0) \times (5 \times 10^0)$.

• **579** Le seguenti scritture polinomiali fanno riferimento all'uso di basi particolari. Scrivi in tale base il numero associato a ciascuna di esse.

- $1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
- $4 \cdot 6^8 + 2 \cdot 6^7 + 1 \cdot 6^6 + 4 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0$
- $7 \cdot 8^4 + 7 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0$
- $1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^0$

Scrivi in forma polinomiale i seguenti numeri nelle basi indicate.

580 22_{dieci}

• **581** 36_{otto}

• **582** 1469_{dieci}

• **583** 431377263_{otto}

• **584** $122_{quattro}$

• **585** 23478_{nove}

•• **586** $C0B_{sedici}$

•• **587** $568A756_{undici}$

Tutor!
Quando scrivi un numero in forma polinomiale, non dimenticarti della potenza con esponente zero.

Esprimi i numeri seguenti, scritti in base *dieci*, nella base indicata a fianco di ciascuno.

ESERCIZIO SVOLTO

588 345 *otto*

Eseguiamo la divisione per 8 e mettiamo da parte i resti:

- 345 diviso 8 fa 43 con resto **1**
- 43 diviso 8 fa 5 con resto **3**
- 5 diviso 8 fa 0 con resto **5**

Ora, rileggendo i resti al contrario (dall'ultimo al primo) abbiamo il risultato:

$345_{dieci} = 531_{otto}$

• **589**	60	*otto*	• **592**	84	*due*	• **595**	163	*nove*
• **590**	35	*sei*	• **593**	77	*sette*	• **596**	361	*cinque*
• **591**	76	*cinque*	• **594**	54	*quattro*	• **597**	4242536	*tre*

Risolvi.

598 Scrivi i numeri naturali da 0 a 13 in base *tre*.

•• **599** Converti direttamente il numero 10110011_{due} nelle basi *otto* e *sedici*.

•• **600** Per ognuna delle seguenti uguaglianze determina la base b:

- $102_b = 49_{dieci}$
- $321_b = 86_{dieci}$
- $333_b = 111_{dieci}$

•• **601** Riscrivi i numeri 345_{sei}, $212_{quattro}$, 72_{due} nel sistema di numerazione a base *cinque*.

•• **602** Ordina dal più piccolo al più grande i seguenti numeri espressi in basi diverse:

141_{sei} 120012_{tre} 42331_{cinque} 1402_{dieci} 6338402_{sette}

•• **603** Converti direttamente il numero 47_{otto} nella base *due*.

•• **604** I numeri 0_b, 1_b, 2_b, 3_b, 4_b, 10_b, 11_b, 12_b, 13_b, ... rappresentano i primi numeri naturali.

- Determina la base b in cui sono scritti.
- Continua la sequenza data fino al numero 1000_b.

Esegui le seguenti addizioni in colonna.

• **605** $4_{otto} + 2_{otto}$

• **606** $3_{otto} + 1_{otto}$

ESERCIZIO SVOLTO

607 $534_{sei} + 142_{sei}$

Calcoliamo l'addizione normalmente ricordando che in base *sei* si raggiunge la "decina" a 6.

$$\begin{array}{r} 534\ + \\ 142\ = \\ \hline 1120 \end{array}$$

→ **in base *sei* si ha: $4 + 2 = 10$, pertanto si scrive 0 e si riporta 1**

→ **in base *sei* si ha: $3 + 4 + 1$ (riporto) $= 12$, pertanto si scrive 2 e si riporta 1**

→ **in base *sei* si ha: $5 + 1 + 1$ (riporto) $= 11$**

• **608** $543_{sei} + 125_{sei}$

•• **609** $13213_{quattro} + 12213_{quattro} + 213_{quattro}$

•• **610** $234_{sei} + 532_{sei} + 121_{sei} + 102_{sei}$

•• **611** Determina una base b tale che il numero:

- 22_b sia dispari
- 18_b sia primo
- 11_b sia minore di 5_{dieci}

Esegui le seguenti operazioni dopo aver scritto tutti gli addendi nella stessa base.

•• **612** $5_{sei} + 4_{dieci}$

•• **613** $7_{nove} - 5_{dieci}$

•• **614** $11_{due} + 4_{dieci}$

•• **615** $22_{sette} + 35_{otto}$

•• **616** $312_{quattro} + 744_{otto}$

•• **617** $11001_{due} + 9_{dieci}$

•• **618** $A_{undici} + 11_{due}$

•• **619** $ABC_{sedici} + 123_{quattro}$

Tutor!

Puoi sempre controllare il risultato portando tutto in base dieci e facendo le operazioni in questa base.

•• **620** Stabilisci in quale base b la seguente operazione dà il risultato indicato: $7_b + 5_b = 11_b$

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

• **621** In base *due*, i numeri pari terminano sempre per zero. V F

• **622** In base *due*, non si possono effettuare divisioni. V F

•• **623** In base *due*, i multipli di quattro hanno sempre un numero pari di zeri. V F

•• **624** I numeri naturali compresi tra 100_{due} e 1000_{due} sono soltanto tre. V F

625 Non possono esistere basi di numerazione superiori a *dieci*. V F

• **626** Un numero scritto con quattro cifre in base *due* si scrive con tre cifre in base *tre*. V F

•• **627** In base n si ha che $n^a = 1\underbrace{00\ldots\ldots0}_{a \text{ volte}}$ per ogni $a \in \mathbb{N}$. V F

• **628** Un numero pari termina con una cifra pari indipendentemente dalla base. V F

• **629** Il risultato di una addizione è indipendente dalla base in cui si esegue il calcolo. V F

Controlla la tua comprensione: Paragrafo 1: F, V, F, F, V; Paragrafo 2: F, F, V, F, F, V, F; Paragrafo 3: F, F, F, V, F, V; Paragrafo 4: V, F, F, F, F, V; Paragrafo 5: V, F, F, F, V, F; Paragrafo 6: F, V, V, V, F, V; Paragrafo 7: F, F, F, V, V, V; Paragrafo 8: F, F, V, V, F; Paragrafo 9: V, F, F, V, F, V, V; Paragrafo 10: F, V, V, V; Paragrafo 11: V, F, V, V, F, F, V, F, V.

ESERCIZI DI FINE UNITÀ

E-TRAINER

Scrivi e calcola le espressioni che risolvono i seguenti problemi.

NELLA REALTÀ

1 Marco riceve 12 euro dalla madre, ne presta 7 a Fabio e ne riceve 4 da Andrea. Quanti euro ha ora in tasca Marco? [9]

• **2** Andrea ha 20 euro, ne spende 7 per mangiare e 12 li restituisce a Marco che glieli aveva prestati; poi, dovendo fare ancora delle spese, se ne fa prestare 10 da Franco. Qual è il bilancio di Andrea? [11 euro]

• **3** Un pastore deve contare le sue pecore e per farlo usa un metodo particolare: le fa uscire dal recinto una alla volta e mette un sassolino in tasca ogni sette pecore che escono. Alla fine il pastore ha in tasca 12 sassolini e devono ancora uscire 2 pecore. Quante sono le pecore? [86]

• **4** Il padre di Giada segue tutte le sue partite e, per avere un ricordo, scatta delle foto. Ogni volta Giada gioca n minuti e il padre scatta n foto. Se a fine campionato Giada ha giocato n volte e il padre ha scattato 49 foto, quanti minuti ha giocato Giada ogni partita? [7]

• **5** Due paletti piantati nel terreno distano tra loro 120 metri. Quanti paletti intermedi, allineati con i primi due, si devono piantare perché si abbiano tra un paletto e l'altro distanze tutte uguali a 20 metri? [5]

Enuncia le proprietà che giustificano i passaggi dei seguenti calcoli.

6 $7 + 9 + 5 = 9 + 5 + 7$

7 $9 - 3 \times 2 = 9 - (3 \times 2)$

8 $3 \times (2 + 5) = 3 \times 2 + 3 \times 5$

9 $7 \times (-5) = -(7 \times 5)$

10 $(3^5)^4 = 3^{5 \times 4}$

11 $9^6 \times 9^4 = 9^{6+4}$

12 $2^7 : 2^2 = 2^{7-2}$

13 $5^8 \times 7^8 = (5 \times 7)^8$

14 $12^8 : 4^8 = (12 : 4)^8$

15 $(5^2)^4 : (5^2)^3 = (5^2)^{4-3}$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

• **16** $2^3 \times 3 + 4 \times (5 \times 6 - 4 \times 7) - 5^2 + (12 + 4 \times 5 - 2^2) : 7$ [11]

• **17** $2^3 \times 5^2 - 9^2 + 3 \times (5 \times 8 - 5 \times 7) - 4^2 : 2 + 10$ [136]

• **18** $(2^3 \times 3 - 3 \times 7) \times (2^2 \times 5 - 3 \times 5) + 2^4 : 2^2 + 3^2 : 3$ [22]

• **19** $[(3 \times 2)^2 + 2 \times 8 - 7^2] : 3 + (2 \times 3 - 6 \times 9) \times 2 + 2^0$ [−94]

• **20** $(2 \times 5 \times 7 - 2^3 \times 3 + 14) : 10 + (2^2 \times 3^2 - 5 \times 6) \times 12 - 70$ [8]

• **21** $2 \times 2^2 + 4 \times (2 \times 3^2 - 2^4 + 1) + 2 \times (2^3 - 2 \times 4) + 5$ [25]

• **22** $[(3^2 \times 5^2 - 5^3) : 5^2 + 7^2 : 7 + 3] : 2 + (3^3 - 2^3 - 9) : 2$ [12]

• **23** $\{[(25 - 3 \times 2^3) \times 2 + 5 \times 2^3] : 6 + 2 \times 3\} \times 2 - 3 \times 2^3$ [2]

24 $\{[(2 \times 5)^2 + 3^3 + 1] : 4 + 5 \times 6\} : 31 + 2^2 \times 3^2$ [38]

25 $\{[(4^2 - 2^4 + 3^2) : 3 + 4^2 + 3^2] : 14 + 3^2\} \times 3$ [33]

26 $\{[(13 + 3) \times (13 - 3)] : (2^5 \times 5) + 5^3 : 5\} : 13$ [2]

27 $\{[(12 \times 3 - 3 \times 2^3) : 2^2 + 2 \times 3] : 3^2 + 5^2\} : 13$ [2]

28 $\{[5 \times (5^4 - 5^0 - 2^3 \times 3 \times 5^2)] : 12 + (2 \times 3 - 2^2)^2 : 4\}^2 : 11$ [11]

29 $\{[1 + 2^2 + 3^3 + 2^8 + 0^3 - (5^0 + 3^3 + 2 \times 2^4)] : 4 + 5\} : 31 + 5^4 : 5^2 + 2^2$ [31]

30 $2 \times \{(2^5 - 27 : 3 + 2^0) : (5 \times 2^2 - 2 \times 7) + [5^3 : (3^3 - 2) + 4] : 3\} + 2^2 \times 3^2 - 5 \times 6$ [20]

31 $\{[(-7 + 5) \cdot 3 + (-2)^2] \times (-2)^3 - 1\} : \{-[(-5)^2 \cdot 20] : [16 \cdot (-5)^3] - (-2)\}$ [1125]

32 $\{[-15 + 4 - (-3)]^2 \cdot (-2)^3 + [7^{13} : (-7)^{13} + 35 - (-6)^2 : 18]\} : (-4)^2$ [−30]

33 $\{[(-6 + 8)^2 : (-4)^3 + (3 - 23)^2 : (17 + (-2)^3 + 11) + [2^4 \cdot (-7)^4 : (-14)^4]]\} \cdot (-5)^3$ [−2500]

34 $\{[-(35 - 5 + (-3))]^4 : [100 - (36 + (-3)^3) - 10]\} : 3^4$ [81]

35 $\{[(-11) \times 13 - (160)^0] : 12^2 - [7^2 + (-3)^2] : (-2)^3\} + \{[(-7) \times (-6) - 2 \times (2^2 \times 3)] : 3\}$ [0]

36 $\{[7 - 10 + 18 \times (-5) + 3^6 : 3^5] : 3\}^6 : [(-30)^2]^3 + 1$ [730]

37 $[-75 - (-2)^6 + (-5)^{10} : (5)^8]^3 : \{-[26 - 169 : 13 - 1] : 2\}^3 - 6^4$ [5 587]

38 $\{-[(-54) : 2]^2 : [-36 + (-3) \times (-2) - 1] - 9\}^0 - [16^2 : (-2)^3]$ [33]

39 $\{[2^{12} - (-2)^{10}] : 3 - 188^6 : (-16)^{12} - (2)^2 \times (-3)^2$ [28]

Calcola le seguenti espressioni con i valori assoluti.

40 $|-3| + 2$

41 $|1 - 4|$

ESERCIZIO SVOLTO

42 $5 - |7 - 4 \times 2| \times 3$

Effettuiamo i calcoli all'interno del valore assoluto, che svolge anche funzione di parentesi:

$5 - |7 - 8| \times 3 = 5 - |-1| \times 3$

ora dobbiamo dare il segno positivo a ciò che si trova all'interno del modulo, quindi:

$5 - |-1| \times 3 = 5 - (+1) \times 3$

a questo punto non resta che svolgere i calcoli rimanenti:

$5 - 1 \times 3 = 5 - 3 = 2$

43 $2 + |4 - 7| + 5$ [10]

44 $|-3 + 5| + |-5 + 3| - 7 + |+2|$ [−1]

45 $16 - [4 - (|-17 + 23 - 5| - 2)] - |-14 + 11|$ [8]

46 $|-6 + (7 - 3)| - [12 + (2 - |-6 + 2| + 2)] - 11 + |4 - 7 + 1|$ [−19]

47 $|-2| \times [7 - (4 - |9 - 11|)] \times 3 - 2$ [28]

48 $|11 - (-2 + |13 + 17 - 22|) : (-2)| \times 3$ [42]

49 $[11 - 2 \times |2 - 11| : 3] : 5 - |11 - 4 \times 2|$ [−2]

• **50** $|24 : (-3)| \times |5 - 2 \times 6 : 4 - (18 : |56 - 47| - 3)| - |12 - 2 \times 7|$ [22]

• **51** $79 - \{[|-240 : 2| : (-7 + 2)] : (-9 + |-13 - 4 \times 2|) + 7\} + [|5| \times ||10 : 5 - 9| - 22| \times 3] : 5$ [119]

• **52** $|25 - 3^3| + 11 - |-12 \times 10 : 2^3 + 15 : 5 + 5|$ [6]

• **53** $\{-16 + |-16 + |-5 + 2^3 \times 3 - 5| : 7| : 7\} - [-|-(3^2 + 2^4)|]$ [11]

• **54** $11 - |13 - |-12 : 4 \times (3^2 - 2^3 \times 6 : 4)| : 3 - 2 \times 6| - 9 : (4^2 - 2^2 - 3 \times 3)$ [6]

• **55** $|-13 + 8|^3 : 25 - 2 \times \left|-7^5 \times 7^3 : |11 - 15 - 3|^6\right| : |-2^4 : 8)| + |3 \times 1^3 - |54 : 3^3 - 13| \times 7|$ [30]

• **56** $\left||-7 + 4|^3 : 3^2 - |4^2 + [10 \times (2^3 + 1) - 10]| : |-4 - 4 \times 5| + (7^5 : 7^3 \times 2 - 10 \times 3^2) : 2^2\right|$ [−1]

•• **57** $[(4^2)^{|4-7|} \times 3^6] : \left|-6^4 \times 2^{|-(19-3\times5)|}\right| - |11^7 : | - 7 \times 2 + 3|^5 : 11^{|-7+5|} - 3^2| \times 5^2$ [−56]

•• **58** $-\left|-6^{|2-5|} \times 4^3\right| : (2^3)^3 + [(5^3)^2 \times |3 - 4 \times 2 - 3|^6]^2 : (5^2 \times 2^2)^{|12-11-5\times3+8|} : |4|^{10}$ [−11]

•• **59** $|-3 \times 2 \times 5|^{|-15+3|+|-6\times8|} : [(|3 - 12|^3)^6 \times (|22 : 11 - 3 \times 4|^{12})^3] \times (19^0)^5$ [30^{24}]

Determina, quando esistono, i valori di $a \in \mathbb{Z}$ che rendono vere le seguenti uguaglianze.

ESERCIZIO SVOLTO

60 $|a - 1| = 7$

Perché l'uguaglianza sia vera, il membro di sinistra deve essere uguale al membro di destra.
D'altra parte sappiamo che

$$|a-1| = \begin{cases} a - 1 & \text{se} \quad a - 1 \geq 0 \\ -(a-1) & \text{se} \quad a - 1 < 0 \end{cases}$$

Allora l'uguaglianza è vera se

$a - 1 \geq 0$ e $a - 1 = 7$ oppure $a - 1 < 0$ e $-(a - 1) = 7$

Nel primo caso $a - 1 = 7$ se $a = 8$. Siccome questa scelta di a verifica anche la disuguaglianza $a - 1 \geq 0$, la scelta $a = 8$, rende vera l'uguaglianza.
Nel secondo caso $-(a - 1) = 7$ è verificata se $-a + 1 = 7$ cioè se $a = -6$ (verificalo). La scelta di $a = -6$ va bene anche per la disuguaglianza $a - 1 < 0$ quindi anche $a = -6$ verifica l'uguaglianza. Allora $|a - 1| = 7$ è vera quando a assume i valori di 8 oppure −6.

• **61** $|20 - a| = 14$ [6; 34]

• **62** $|2a + 5| = 7$ [1; −6]

• **63** $|3a + 2| = 3$ [nessuno]

• **64** $|1 - 2a| = 3$ [−1; 2]

•• **65** $-|a + 1| = 9$ [nessuno]

•• **66** $|9 - a^2| = 0$ [±3]

•• **67** $|2 - a^2| = 2$ [0; ±2]

•• **68** $|a^2 + 3a^3| = -1$ [nessuno]

In ciascuna delle seguenti scritture sostituisci ai puntini il segno opportuno scelto fra "=", ">", "<".

69 100 ..... 99 + 2

70 18 : 2 ..... 5 + 4

71 100 : 20 20

• **72** 100 ..... 99 − 2

• **73** 44 × 3 ..... 44 × 2

• **74** 2 × 7 ..... 20 − 6

• **75** (3 + 5) × 2 17

•• **76** (successivo di a) −4 .....
(precedente di a) +5

Risolvi.

• **77** Determina tutti i numeri naturali di tre cifre che si possono scrivere utilizzando solamente le cifre 2, 5, 7 e ciascuna di esse una sola volta per ogni numero. Quanti sono?

• **78** Determina tutti i numeri naturali di tre cifre che si possono scrivere utilizzando solamente le cifre 7 e 5. Quanti sono?

• **79** In quanti tra i primi cento numeri naturali (cioè maggiori o uguali a 0 e minori di 100) compare la cifra 2? In quanti la cifra 0?

• **80** Quanti sono i numeri naturali compresi tra

- 100 e 200
- 27 e 89
- 1 955 e 1 987
- 302 e 303

•• **81** Un numero naturale a ha due cifre, mentre un numero naturale b ha tre cifre. È vero che $a < b$? Per quali valori di a e b vale la disuguaglianza $a + 3 > b$?

•• **82** La somma del successivo e del precedente di n è 42. Quale numero è n?

•• **83** La somma di tre numeri consecutivi è 81. Di quali numeri si tratta?

•• **84** Il numero n è il successivo di a e il precedente di b. Il prodotto di a per b è 48. Qual è il numero n?

•• **85** Sia a la somma del precedente e del successivo di un numero naturale: a può essere dispari?

•• **86** La somma dei due successivi e dei due precedenti di un numero naturale è 128: di quale numero naturale si tratta?

ESERCIZIO SVOLTO

87 Spiega perché la somma di due numeri naturali è pari se i numeri sono entrambi pari o entrambi dispari.

Un numero naturale è pari quando è un multiplo di 2 e cioè è il prodotto di 2 per un altro numero naturale diverso da zero. Un numero naturale pari è quindi un numero che si può esprimere nella forma $2k$, con $k \neq 0$.
Ora osserviamo che ogni numero dispari è il successivo di un numero pari.
Quindi un numero naturale dispari è un numero che si può esprimere nella forma $2k + 1$, per un opportuno k scelto tra i numeri naturali. Per esempio $7 = 2 \times 3 + 1$, cioè in questo caso $k = 3$.
Se abbiamo due numeri naturali pari vuol dire che li possiamo scrivere come $2h$ e $2k$, con h e k numeri opportuni (ad esempio 10 e 18 li possiamo scrivere come $2 \cdot 5$ e $2 \cdot 9$, cioè $h = 5$ e $k = 9$). Allora la somma si può scrivere come $2h + 2k$. Usando la proprietà distributiva possiamo scrivere anche

$$2k + 2h = 2(k + h) = 2p,$$

essendo p il numero naturale somma di k e h.
Da qui possiamo concludere che la somma di due numeri pari è divisibile per 2, e quindi è ancora un numero pari.
Analogamente, due qualsiasi numeri dispari sono rappresentati da $2k + 1$ e $2h + 1$ e la loro somma risulta

$$(2k + 1) + (2h + 1) = 2k + 2h + 2 = 2(k + h + 1) = 2q,$$

essendo q il naturale somma di h, k, 1.

●● **88** Inserisci opportunamente delle parentesi nell'espressione $3 \times 5 - 2 + 24 - 18 : 2$ in modo che il suo valore sia 12.

●● **89** Inserisci opportunamente delle parentesi nell'espressione $3 + 15 : 3 + 2$ in modo che il suo valore sia 6 oppure 10.

●● **90** Spiega perché la differenza di due naturali è dispari se uno solo dei due è dispari.

●● **91** La differenza di due naturali, $a - b$, è pari. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- I numeri a e b sono entrambi pari;
- I numeri a e b sono entrambi dispari;
- Il numero a è pari e il numero b è dispari.

Dai una giustificazione delle risposte date.

●● **92** Verifica in almeno tre esempi che, dati due numeri a e b, il prodotto tra MCD(a, b) e mcm(a, b) è uguale al prodotto di a e b.

●● **93** Considera almeno quattro coppie di naturali a e b primi tra loro e verifica che il loro MCD è uguale a 1 mentre il loro mcm è uguale al prodotto di a e di b.

●● **94** Quanti sono i numeri primi? Quanti di essi sono pari? Quanti dispari?

●● **95** È vero che se il prodotto di due numeri naturali è divisibile per 3, allora almeno uno dei due numeri è divisibile per 3? E se il prodotto dei due numeri è divisibile per 4, è sempre vero che almeno uno dei due numeri è divisibile per 4?
(*Prima di rispondere considera molti esempi.*)

●● **96** Spiega perché, dati a e b numeri naturali non nulli, allora MCD$(a, b) \times$ mcm$(a, b) = a \times b$.

NELLA REALTÀ

●● **97** Il Parlamento Italiano dura in carica 5 anni, il Presidente della Repubblica Italiana dura in carica 7 anni, il Governatore della Banca d'Italia dura in carica 6 anni. Nell'anno 2006 sono state rinnovate tutte e tre le cariche istituzionali. In assenza di crisi, in quale anno ci sarà di nuovo quello che si chiama "ingorgo istituzionale", ovvero si eleggeranno di nuovo tutte e tre le cariche?

98 Se due numeri interi sono opposti, a che cosa è uguale la loro somma? Il loro prodotto è positivo o negativo?

● **99** Stabilisci quali delle seguenti affermazioni sui numeri interi sono vere e quali sono false.

- L'opposto di un numero negativo è positivo. V F
- Un numero e il suo doppio sono concordi. V F
- Un numero e il suo quadrato sono concordi. V F
- Un numero e il suo cubo sono concordi. V F
- La somma di due numeri concordi è positiva. V F
- La somma di due numeri concordi è concorde con ciascuno dei due addendi. V F
- Il prodotto di due numeri concordi è positivo. V F
- Il prodotto di due numeri concordi è concorde con ciascuno dei due fattori. V F
- Il prodotto di tre numeri concordi è positivo. V F

• **100** Determina almeno due numeri interi opposti che risultino:

- entrambi minori di 4;
- entrambi maggiori di -2;
- entrambi aventi modulo compreso tra 10 e 20.

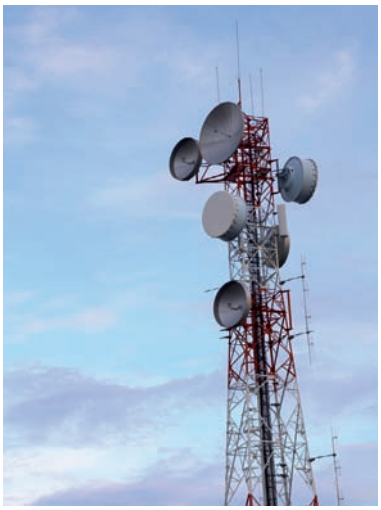
• **101** Qual è il più piccolo intero minore di 10? Qual è il più piccolo intero il cui valore assoluto sia minore di 10?

• **102** Determina almeno un numero intero minore di 10 che abbia valore assoluto maggiore di 20. Esiste un numero intero maggiore di 20 che abbia valore assoluto minore di 10?

NELLA REALTÀ

• **103** Un satellite per telecomunicazioni viene messo in orbita alle 14:00 di oggi. Se si assume come "istante zero" il momento della messa in orbita e si usa come unità di misura del tempo l'ora, come vanno indicate:

- le 10:00 di oggi;
- le 23:00 di oggi;
- le 17:00 di ieri;
- le 10:00 di domani.



• **104** Sapendo che a e b sono due numeri interi discordi e che a è negativo, disponi in ordine crescente i numeri $0, a, b$.

• **105** Sapendo che a e b sono due numeri interi positivi e che $|a| < |b|$, disponi in ordine crescente i numeri $0, a, b, -a, -b$.

•• **106** Disponi in ordine crescente i numeri 0, a, b, c, $-a$, $-b$, $-c$ sapendo che a, b, c sono numeri interi; a, b e b, c sono coppie di numeri discordi; $|a| < |b| < |c|$ e b è positivo.

•• **107** Il prodotto di due numeri interi x e y è -48. Determina il prodotto:

- dell'opposto di x per y;
- dell'opposto di x per la metà dell'opposto di y.

•• **108** Il prodotto di due numeri x e y è 16. Determina il prodotto:

- del doppio di x e della metà di $-y$;
- dell'opposto del doppio di x per l'opposto del triplo di y;
- dell'opposto di y e dell'opposto di x.

•• **109** Il prodotto di due numeri interi è 54; se si aggiunge 3 al secondo numero si ottiene come prodotto 45. Determina i due numeri.

•• **110** Considera varie coppie di numeri interi che hanno come somma 10 (ad esempio 7 e 3, 4 e 6, oppure 13 e -3); calcola poi il prodotto dei numeri di ciascuna coppia. Usando esempi, cerca di stabilire quando tale prodotto è negativo e in quale caso assume valore massimo.

●● **111** Trova tre numeri interi a, b, c che abbiano come somma zero. È vero che la somma di a e b è uguale all'opposto di c? E le somme di b e c e di a e c a che cosa sono uguali? Tra i numeri $a, a+b$ e $a+b+c$ quale è uguale al suo opposto?

●● **112** Spiega perché per ogni numero intero a risulta $|a-1| = |1-a|$.

●● **113** Se $|a| = 2$ e $|b| = 3$, quali valori può assumere $a+b$?

●● **114** Se $|a| = |b| \neq 0$

- la somma $a+b$ può essere uguale a zero?
- la differenza $a-b$ può essere uguale a zero?

Giustifica le tue risposte.

●● **115** Se $a = 1$ e $|a+b| = 2$ quali valori può assumere b?

●● **116** Se $|a| = 7$ quali valori può assumere a?

●● **117** Oltre al sistema di numerazione in base *dieci*, determina almeno un'altra base in cui 11 è un numero primo.

TEST!

Risposta corretta: 2
Risposta sbagliata: −1
Risposta saltata: 0

1 Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a. Zero non appartiene ai numeri naturali.
b. Se a è un numero naturale, allora il suo successivo è un numero naturale.
c. Se a è un numero naturale, allora anche il suo opposto è un numero naturale.
d. I numeri naturali non si possono rappresentare su una retta orientata.

2 Quali tra le seguenti affermazioni sono vere?

a. La differenza tra un numero intero e il suo opposto è il doppio del numero dato.
b. La somma di due interi è sempre maggiore di ciascun addendo.
c. La somma di due interi negativi è maggiore di entrambi.
d. La somma di due numeri interi di segno opposto è zero.

3 Quali tra le seguenti affermazioni sono vere?

a. Il quoziente di due interi di segno opposto è positivo.
b. Il prodotto di due interi negativi è ancora un intero negativo.
c. Il quoziente di due interi negativi è minore di entrambi.
d. Il prodotto di due interi di segno opposto è minore o uguale a entrambi.

4 Quali tra le seguenti espressioni sono state svolte in modo corretto?

a. $1 + 7 - 4 = 8 - 4 = 4$
b. $6 - 2 \times 2 + 4 \times 3 = 6 - 4 + 12 = 10 + 12 = 24$
c. $9 - 3 \times 2 = 6 \times 2 = 12$
d. $5 \times (9 - 7) = 45 - 7 = 38$

5 Quale tra le seguenti è la scomposizione in fattori primi del numero 2 100?

a. $2^2 \times 3 \times 5 \times 35$
b. $2 \times 5 \times 7 \times 15$
c. $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$
d. $2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 14$

6 Il massimo comune divisore di 18 e 30 è:

a. 6
b. 9
c. 2
d. 90

7 Dati due numeri naturali a e b, possiamo affermare che:

a. se a e b sono coprimi, allora $\text{MCD}(a, b) = 1$.
b. se a e b sono pari, allora $\text{MCD}(a, b) = 2$.
c. $\text{MCD}(a, b) < a$ e $\text{MCD}(a, b) < b$.
d. se a è pari e b è dispari, allora $\text{MCD}(a, b)$ è pari.

8 Il minimo comune multiplo di 18 e 30 è:

a. 30
b. 60
c. 90
d. 180

9 Il risultato dell'espressione $\{(3 + 4) : 7 - 2 \times [6 - (8 - 13) + (1 + 3) \times 11] : 11\} : 3 + 3$ è:

a. -26
b. 0
c. 1
d. 5

10 Dati due numeri naturali a e b, possiamo affermare che:

a. $\text{mcm}(a, b) > a$ e $\text{mcm}(a, b) > b$.
b. se a e b sono coprimi, allora $\text{mcm}(a, b) = a$.
c. se a è pari e b è dispari, allora $\text{mcm}(a, b)$ è pari.
d. $\text{mcm}(a, b) \geq a \times b$.

11 Se a e b sono numeri naturali distinti, allora:

a. se a e b sono numeri primi, allora $\text{mcm}(a, b) = 2 \cdot \text{MCD}(a, b)$.
b. vale la relazione $\text{mcm}(a, b) < \text{MCD}(a, b)$.
c. se a e b sono divisibili per 5, allora anche $\text{MCD}(a, b)$ e $\text{mcm}(a, b)$ lo sono.
d. se a e b sono dispari, allora $\text{MCD}(a, b)$ è divisibile per 3.

12 Il valore dell'espressione $|11 - 33| - 2 \times (|-3| + 2)$ è:

a. 16 b. -22 c. 14 d. 12

13 Quali tra le seguenti affermazioni sono vere?

a. Due numeri interi che hanno lo stesso modulo sono uguali.
b. L'opposto di un numero intero è negativo.
c. Due numeri che hanno lo stesso segno sono opposti.
d. Zero è un numero intero.

14 Il numero 345_{dieci} è uguale a:

a. 0432_{cinque} b. 135_{otto} c. 2340_{cinque} d. 3450_{dieci}

15 Quali tra le seguenti affermazioni sono vere?

a. In base *due* ci sono soltanto tre cifre.
b. Un numero scritto in base *dieci* non può essere scritto con le stesse cifre in base *due*.
c. In base *due* i numeri dispari terminano sempre con la cifra 1.
d. In base *due* la somma di due numeri pari può essere un numero dispari.

Controlla le risposte in fondo al libro e calcola il tuo punteggio.

Il tuo punteggio è $P = ...$

$P \leq 0$:	C'è qualche problema! Le operazioni e i numeri interi sono alla base di tutto il resto. Prima di andare avanti è bene che riguardi qualche concetto. Fai gli Esercizi di Recupero per allenarti!
$0 < P \leq 14$	Non tutto è perduto. Magari hai fatto qualche errore di distrazione o c'è qualche cosa che non hai ben capito. Cerca gli errori e fai uno studio mirato su questi concetti. Non sei lontano dalla sufficienza!
$14 < P \leq 24$	Bravo! Operazioni e numeri interi non ti danno problemi. Con un po' di attenzione in più, puoi fare anche meglio!
$24 < P \leq 30$	Bravissimo! I numeri interi e i passaggi di base non hanno segreti per te!
	Prova a cimentarti con gli esercizi di Stimoliamo la mente.

STIMOLIAMO LA MENTE

Usa l'intuito o fai qualche prova per determinare se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustifica di volta in volta la tua risposta.

1 Il prodotto di due naturali dispari è dispari. V F

2 Il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è sempre divisibile per 6. V F

3 Il numero 2607 è divisibile per 11, infatti si ha $2607 : 11 = 237$. Riscrivendo le cifre del numero dato in ordine inverso si ottiene il numero 7062, anch'esso divisibile per 11; infatti $7062 : 11 = 642$. Possiamo dire che questo è un caso particolare: in generale un numero divisibile per 11 scritto in ordine inverso non è ancora divisibile per 11. V F

Risolvi.

4 Luca conta le monete contenute nel suo salvadanaio e usa un metodo particolare: le divide in gruppi da 2, poi da 3, da 4, da 5, da 6, da 7 e da 8 e ogni volta ne avanza una. Se le monete nel salvadanaio sono meno di 1000, sai dire quante sono? [841]

5 Il prodotto di due numeri interi a e b è -50. Aumentando di 1 il primo fattore si ottiene come prodotto -60. A che cosa è uguale il secondo fattore? E il primo? [$b = -10$; $a = 5$]

6 Il gioco seguente è apparso, molto tempo fa, in una serie di trasmissioni di due importanti reti televisive straniere.
Bisogna costruire, con un gruppo di numeri interi assegnati, un'espressione in cui figurino le operazioni "+", "−", "×" e avente un risultato R assegnato.

Regole del gioco		Esempio	
1.	Non è necessario usare tutti i numeri assegnati.	Gruppo di numeri	4, 6, −7, −12, 100
2.	Nessun numero deve essere usato più di una volta.	Risultato	$R = 144$
3.	Le operazioni si possono usare più volte.	Soluzione	$100+4\times[(6+(-7)-(-12)]=144$

Naturalmente, se il numero R è scelto a caso, non sempre esiste un'espressione del tipo richiesto, così come può capitare che, per qualche scelta di R, esista più di una soluzione. Nel nostro caso, c'è una seconda espressione che ammette come risultato 144:

$$\{100 + [(-12) + (-7)] \times 4\} \times 6 = 144.$$

Ora prova tu. Usa questo gruppo di numeri

$$4, 5, 6, 7, 8$$

e le operazioni "+", "−", "×" per scrivere un'espressione per ciascuno dei seguenti risultati

$R = 100$ $R = 121$ $R = -125$ $R = 166$ $R = 95$

$R = 150$ $R = -100$ $R = 144$ $R = 110$

Non fermarti alla prima soluzione, per alcuni risultati ce n'è sicuramente più di una.

ESERCIZI DI RECUPERO

Determina se le affermazioni seguenti sono vere o false.

1 I numeri naturali sono infiniti. V F

2 È sempre possibile sommare due numeri naturali. V F

3 Tutti i numeri dispari sono primi. V F

4 Il MCD di due numeri è sempre maggiore di 1. V F

5 Il mcm di due numeri è uguale al loro prodotto. V F

6 La somma di un numero intero con il suo opposto è uguale a zero. V F

7 Se il prodotto di due numeri è negativo, allora i fattori sono di segno discorde. V F

8 Una potenza con base intera ed esponente negativo è sempre negativa V F

9 Per scrivere otto in base *due* occorrono sei cifre. V F

10 La scrittura 16_{sei} è scorretta. V F

Operazioni ed espressioni con i numeri interi

Teoria: paragrafi 8 e 9

Nei seguenti esercizi svolti sono stati commessi uno o più errori. Trovali e correggili, svolgendo correttamente gli esercizi.

11 $3 + 4 \times 5 \xrightarrow{①} 7 \times 5 \xrightarrow{②} 35$

12 $6 - (3 - 8) \xrightarrow{①} 6 - 5 \xrightarrow{②} 1$

13 $3^6 : 3^2 \xrightarrow{①} 3^{6:2} \xrightarrow{②} 3^3 \xrightarrow{③} 27$

14 $5^5 : 5^2 \cdot 5 \xrightarrow{①} 5^3 \cdot 5 \xrightarrow{②} 5^3$

15 $3^{10} : 3^5 - 3 \xrightarrow{①} 3^{10:5} - 3^1 \xrightarrow{②} 3^2 - 3^1 \xrightarrow{③} 3^{2-1} \xrightarrow{④} 3$

16 $[(-5)^3 : (-5)^2 - 6]^0 \xrightarrow{①} [(-5)^1 - 6]^0 \xrightarrow{②} [5 - 6]^0 \xrightarrow{③} (-1)^0 \xrightarrow{④} -1$

ESERCIZIO PASSO PER PASSO

17 Calcola l'espressione

$\{[5 - (6^2 : 2 - 24)] \cdot 3^2 - (-5)^2 - 34\} : (7 \cdot 5 - 15)$.

1. Copia l'espressione sul tuo quaderno.
2. Svolgi prima le operazioni all'interno delle parentesi tonde in quest'ordine
   - prima le potenze
   - poi prodotti e divisioni nell'ordine in cui compaiono
   - infine somme e differenze nell'ordine in cui compaiono.
3. Ora svolgi le operazioni nelle parentesi quadre mantenendo sempre lo stesso ordine di svolgimento. Ricorda di stare attento ai segni.
4. A questo punto svolgi le operazioni nelle parentesi graffe.
5. Infine, svolgi le operazioni restanti per ottenere il risultato.

$\{[5 - (6^2 : 2 - 24)] \cdot 3^2 - (-5)^2 - 34\} : (7 \cdot 5 - 15) =$

$(\square : 2 - 24)$

$(\square - 24)$ $\quad$ $(\Delta - 15)$

$= \{[5 - (-6)] \cdot 3^2 - (-5)^2 - 34\} : 20 =$

$[5 + \diamond]$

$= \{11 \cdot 3^2 - (-5)^2 - 34\} : 20 =$

$= \{11 \cdot \square - \square - 34\} : 20 =$

$= 40 : 20 = 2$

Calcola il valore delle seguenti espressioni, completando gli spazi vuoti.

18 $5^3 \times 5^4 : [5^3]^2 \longrightarrow 5^{\cdots\cdots} : 5^{\cdots\cdots} \longrightarrow 5$

19 $\{54 - 9 \times [7 - (2 - 10) : (-4)]\} : (3 - 6) + 3 \longrightarrow \{54 - 9 \times [7 - (- \ldots\ldots) : (-4)]\} : (- \ldots\ldots) + 3 \longrightarrow$

$\longrightarrow \{54 - 9 \times [7 - (\ldots\ldots 2)]\} : (- \ldots\ldots) + 3 \longrightarrow \{54 - 9 \times \ldots\ldots\} : (- \ldots\ldots) + 3 \longrightarrow$

$\longrightarrow \{\ldots\ldots\} : (- \ldots\ldots) + 3 \longrightarrow - \ldots\ldots + 3 \longrightarrow 0$

20 $3 \times 2 - \{26 + 30 : [10 - (4 \times 2 - 3)] + 1 - (10 \times 2)\} \longrightarrow 6 - \{26 + 30 : [10 - (\ldots\ldots - 3)] + 1 - \ldots\ldots\} \longrightarrow$

$\longrightarrow 6 - \{26 + 30 : [10 - \ldots\ldots] + 1 - \ldots\ldots\} \longrightarrow 6 - \{26 + 30 : \ldots\ldots + 1 - \ldots\ldots\} \longrightarrow$

$\longrightarrow 6 - \{26 + \ldots\ldots + 1 - \ldots\ldots\} \longrightarrow 6 - \{\ldots\ldots\} \longrightarrow -7$

21 $12 - \{3^2 - [6 - (38 - 3^2 \cdot 2 - 2) : 3 + 2] - (11 - 21 : 3)\} + 4 \longrightarrow$

$\longrightarrow 12 - \{3^2 - [6 - (38 - \ldots\ldots \cdot 2 - 2) : 3 + 2] - (11 - \ldots\ldots)\} + 4 \longrightarrow$

$\longrightarrow 12 - \{3^2 - [6 - (38 - \ldots\ldots - 2) : 3 + 2] - (\ldots\ldots)\} + 4 \longrightarrow$

$\longrightarrow 12 - \{3^2 - [6 - (\ldots\ldots) : 3 + 2] - 4\} + 4 \longrightarrow 12 - \{3^2 - [6 - \ldots\ldots + 2] - 4\} + 4 \longrightarrow$

$\longrightarrow 12 - \{3^2 - \ldots\ldots - 4\} + 4 \longrightarrow 12 - \{\ldots\ldots - 2 - 4\} + 4 \longrightarrow 12 - \ldots\ldots + 4 \longrightarrow 13$

22 $\{[(17 - 6^5 : 6^5)^2 : (-2)^6] \cdot 2^2 \cdot 3^2\} : 18 + (-10) \longrightarrow$

$\longrightarrow \{[(17 - \ldots\ldots)^2 : (-2)^6] \cdot 2^2 \cdot 3^2\} : 18 + (-10) \longrightarrow$

$\longrightarrow \{[(16)^2 : (\ldots\ldots)^6] \cdot 2^2 \cdot 3^2\} : 18 + (-10) \longrightarrow \{[(2^{\cdots\cdots})^2 : (2)^6] \cdot 2^2 \cdot 3^2\} : 18 + (-10) \longrightarrow$

$\longrightarrow \{[2^{\cdots\cdots} : 2^6] \cdot 2^2 \cdot 3^2\} : 18 + (-10) \longrightarrow \{\ldots\ldots \cdot 2^2 \cdot 3^2\} : 18 + (-10) \longrightarrow$

$\longrightarrow \{4 \cdot \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\} : 18 + (-10) = 144 : 18 + (-10) \longrightarrow \ldots\ldots + (-10) \longrightarrow \ldots\ldots + (-10) \ldots \cdot 10 \longrightarrow -2$

Scomposizione, MCD e mcm

Teoria: paragrafi 5 e 6

Scomponi in fattori primi i seguenti numeri.

ESERCIZIO PASSO PER PASSO

23 315

1. Controlla se il numero 315 è divisibile per 2 o per 3 e così via. Appena trovi un divisore, dividi 315 per il divisore trovato: scrivi il divisore nella colonna di destra e il quoziente sotto il numero 315.
2. Ripeti il procedimento con il quoziente trovato. Se hai già scartato un numero perché non è un divisore, non serve riprovare: nemmeno il quoziente sarà divisibile per quel numero.
3. Ripeti ancora il procedimento fino a trovare quoziente 1.
4. Moltiplica i numeri che hai nella colonna di sinistra e usa le proprietà delle potenze per raggrupparli. Questa è la scomposizione cercata.

315 divisibile per
2 → NO (finisce per 5)
3 → SI (3 + 1 + 5 = 9)

105 divisibile per
3 → SI (1 + 0 + 5 = 6)

35 divisibile per
3 → NO (3 + 5 = 8)
5 → SI (Finisce per 5)
7 divisibile per 7

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 =$
$= 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

24 252 135 198

25 1400 540 1617

Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di numeri.

26 12, 18 30, 42 40, 50 5, 80

27 24, 36 78, 72 24, 48 100, 120

• **28** 4, 6, 8 5, 9, 15 14, 21, 35

• **29** 6, 10, 15 3, 12, 24 20, 30, 100

• **30** 30, 45, 105 36, 54, 96 50, 60, 75

• **31** Tra le seguenti coppie di numeri segna con una crocetta quelle che sono formate da numeri primi fra loro.

☐ 60, 18 ☐ 60, 17 ☐ 150, 49 ☐ 37, 91

☐ 1111, 1133 ☐ 78, 40 ☐ 83, 391 ☐ 169, 289

Numerazioni in altre basi

Teoria: paragrafi 10, 11 e 12

Riscrivi i seguenti numeri nel sistema di numerazione in base *due*.

ESERCIZIO PASSO PER PASSO

32 15_{otto}

1. Innanzitutto passa alla base *dieci*, scrivendo il numero dato in forma polinomiale usando le potenze del numero indicato dalla base.
2. Dividi ripetutamente il numero ottenuto in base *dieci* per 2, riportando i resti, fino ad ottenere quoziente 0.
3. Leggi dal basso verso l'alto i resti che hai ottenuto. Questo è il numero in base *due*.

$15_{\text{otto}} = 1 \cdot 8 + 5 = 13_{\text{dieci}}$

13 | 2
1 6 | 2
0 3 | 2
1 1 | 2
1 0

$13_{\text{dieci}} = 1101_{\text{due}}$

33 4_{dieci} 7_{dieci} 5_{otto}

34 11_{sei} 2_{tre} 125_{dieci}

Completa le seguenti tabelle nelle basi indicate.

35 Base tre

+	0	1	2
0	0		
1			10
2			

36 Base tre

x	0	1	2
0	0		
1			2
2			

37 Base quattro

+	0	1	2	3
0	0			
1				
2				11
3				

[V, V, F, F, F, V, V, F, F, V]

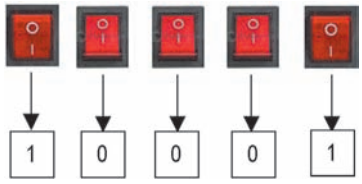
MATEMATICA E MODELLI

Il linguaggio dei computer: più lungo eppur più economico!

È noto che i computer usano il sistema binario: qualunque cosa scriviamo sulla tastiera e poi vediamo comparire sul nostro schermo o qualunque operazione il computer faccia, in realtà non è altro che una sequenza, più o meno lunga di 0 e 1.
Ti sei chiesto perché viene usato proprio il sistema binario?
Se pensiamo alla lunghezza dei numeri diremmo che il sistema binario è molto più dispendioso rispetto a quello decimale. Immaginiamo che ogni volta che facciamo memorizzare un numero al computer, ogni cifra occupi una "casellina" di memoria. Così per esempio 5 occupa una casellina, 10 ne occupa due, 25 ne occupa ancora due.

a. *Quante caselline di memoria servono al computer per memorizzare i numeri 5, 10 e 25 in base due?*

Come hai visto ne servono subito tante di più! Ma allora perché questo spreco di spazio?
Pensiamoci meglio. Abbiamo detto che la base due utilizza solo due simboli, lo 0 e l'1. Il computer così come gli altri strumenti elettronici, interpretano questi due simboli in termini di segnali elettrici anzi in termini di un unico segnale elettrico: se il segnale è presente lo strumento elettronico lo interpreta come 1, se è assente lo interpreta come 0.
Quello che fa il computer quindi non è nient'altro che aprire o chiudere un circuito per far passare o non passare il segnale. Immaginando che chiusura e apertura del circuito avvengano con degli interruttori rispettivamente spenti e accesi, la configurazione qui a lato corrisponderebbe al numero 10001_{due} cioè al numero 17_{dieci}.

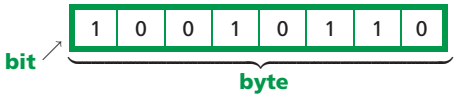


Per rappresentare anche i numeri negativi basta usare la convenzione che il primo interruttore a sinistra rappresenti il segno: "+" se l'interruttore è acceso, "−" se l'interruttore è spento.

b. *Quanti interruttori servirebbero a un computer per rappresentare il numero* -1200_{dieci}?

Ogni volta che un interruttore fa passare o meno la corrente viene memorizzata la cifra 1 o 0 (o + o -) in una casellina di memoria.
Nel computer ogni casellina contenente una delle due cifre, 0 o 1, si chiama bit. Una stringa di 8 bit forma un byte.

c. *Quanti numeri naturali si possono formare con un byte? E quanti numeri interi?*



d. *Se ogni casellina potesse essere riempita non solo con 1 e 0, ma con una qualunque delle nostre cifre decimali, quanti numeri potremmo formare?*

Se hai risposto correttamente ti sarai accorto che di nuovo, con la stessa memoria si possono ottenere più numeri nella scrittura decimale che nella scrittura binaria.
Il vero vantaggio della scrittura binaria non è quindi nello lo spazio di memoria quanto nel modo per trasmettere e ricevere le informazioni: l'economia è nel non aver bisogno di più di un segnale. Per occupare una casellina con una delle dieci cifre decimali, il computer avrebbe bisogno di poter emettere e ricevere correttamente dieci segnali diversi, a ognuno dei quali è associata una cifra.
Con la numerazione binaria, è sufficiente un solo segnale, qualunque esso sia. L'assenza o la presenza del segnale è sufficiente. Proprio perché basta un solo segnale è impossibile riceverlo in maniera sbagliata e quindi sbagliare numero.

UNITÀ G 0

CHE COSA SAI DI GEOMETRIA

I segnali stradali e le forme geometriche

Per superare l'esame per il patentino è necessario conoscere i segnali stradali. Ce ne sono di varie forme, ognuna delle quali ha un ben preciso significato.

Sapresti dire, aiutandoti con gli esempi illustrati nella fotografia, che forma hanno i segnali di pericolo? Quelli di divieto?

Le indicazioni direzionali? Il segnale di strada con precedenza?

Sai citare qualche proprietà delle corrispondenti figure geometriche?

[soluzione nel paragrafo 6]

1. Rette, angoli e poligoni

In questa prima Unità, di carattere introduttivo, richiamiamo alcune nozioni viste nella Scuola Media. Lo studio di questa Unità serve a precisare le parole più usate in geometria e, più in generale, alcune espressioni del linguaggio matematico. La trattazione è condotta facendo spesso ricorso all'intuizione, senza la pretesa di una impostazione rigorosa. Le proprietà e i concetti qui esposti saranno quindi ripresi approfonditi nel seguito.

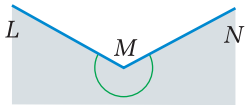
Punti, rette, segmenti

Tra le figure più semplici, citiamo in primo luogo **punti**, **rette** e **segmenti**. Indicheremo i punti con le lettere maiuscole dell'alfabeto (A, B, C, ...) e le rette con le lettere minuscole (a, b, c, ...). I due punti A e B che delimitano un segmento sono chiamati **estremi** del segmento, che, a sua volta, viene detto **segmento** AB. Anche la retta passante per due punti A, B è chiamata **retta** AB.

Un qualunque segmento, per quanto "grande", è limitato (e quindi ha lunghezza finita); invece una retta è una figura **illimitata**. Nelle illustrazioni, una retta r viene rappresentata con un segmento. Talvolta, per sottolineare il fatto che una retta è illimitata, le due estremità vengono tratteggiate. Nel seguito non useremo questa convenzione, perché risulterà chiaro, volta per volta, se intendiamo riferirci ad un segmento o a una retta.

Un punto O di una retta r la divide in due **semirette**. Ogni semiretta è una figura illimitata da una sola parte (o in un solo *verso*). Il punto O è detto **origine** delle due semirette.

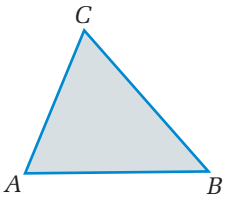
Angoli e poligoni



Descriviamo ora quanto illustrato nella figura a fianco.

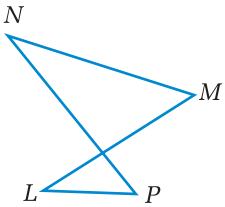
Il punto O è il **vertice** del primo **angolo**, mentre le semirette OP ed OQ sono i suoi **lati**. Analogamente, M è il vertice mentre le semirette ML ed MN sono i lati del secondo angolo.

I due angoli vengono indicati con i simboli $\widehat{POQ}$ ed $\widehat{LMN}$, o anche più brevemente, se non ci sono ambiguità, con $\widehat{O}$ ed $\widehat{M}$.



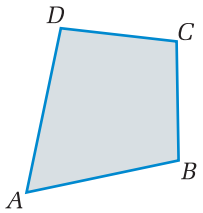
Dati tre punti A, B, C *non allineati* (cioè che non giacciono su una stessa retta), disegniamo i tre segmenti AB, BC, CA. La parte finita di piano racchiusa dai tre segmenti è detta **triangolo** ABC.

Il triangolo ABC ha tre *lati* (i segmenti AB, BC, CA), tre *vertici* (i punti A, B, C), tre *angoli* ($\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$).



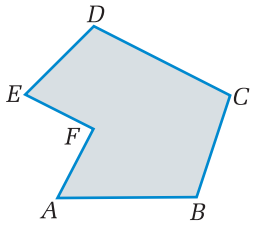
Dati quattro punti A, B, C, D, distinti fra loro, disegniamo i quattro segmenti AB, BC, CD, DA. Se non capita che due di tali segmenti abbiano un punto in comune (oltre, naturalmente, agli estremi A, B, C, D), i quattro segmenti individuano una parte finita di piano che è detta **quadrilatero** $ABCD$.

Se, invece, due segmenti hanno un punto in comune (come i segmenti LM ed NP della figura a fianco), non si ottiene un quadrilatero. Un quadrilatero ha quattro lati, quattro vertici e quattro angoli.



Triangoli e quadrilateri sono casi particolari di **poligoni**.

In generale, dati in un certo ordine 3 o più punti distinti A, B, C, ..., V, Z, disegniamo i segmenti AB, BC, ..., VZ, ZA. Se non capita che due di tali segmenti abbiano punti in comune (diversi dagli estremi), la parte finita di piano delimitata dai segmenti stessi è detta *poligono*.
Come nei casi precedenti, si parla di vertici, lati, angoli del poligono.
Un poligono con cinque lati si chiama *pentagono*, con sei *esagono*, ecc.



2. Movimenti rigidi e figure uguali

In geometria è molto frequente parlare di segmenti uguali, angoli uguali, triangoli uguali. Intuitivamente, è semplice capire cosa si intende per "figure uguali", ma il discorso sull'uguaglianza delle figure diventa assai complesso, se lo si vuole trattare da un punto di vista rigoroso. Per questo motivo, ci limitiamo a una presentazione intuitiva dell'argomento con un ricorso esplicito all'idea di movimento. Anche quando riprenderemo il discorso nel seguito, faremo riferimento alle nozioni intuitive qui esposte.
Nello studio della fisica si introduce il movimento dei corpi e si precisa la differenza fra *corpi rigidi* e *corpi deformabili*. Inoltre, si parla di **movimenti rigidi** per indicare i movimenti effettuati con corpi rigidi nel piano e nello spazio. Anche le figure geometriche vanno pensate come corpi rigidi, perché possono essere sottoposte a movimenti che le trasferiscono da una zona ad un'altra del piano o dello spazio, senza deformarle. Pertanto, tutte le volte che, nel seguito, parleremo di movimento, intenderemo riferirci a movimenti rigidi.

Lo studio della geometria comprende due parti: la **geometria del piano**, trattata inizialmente, e la **geometria dello spazio**.
Lo studio della geometria del piano (o *geometria piana*) ha come oggetto il *piano* e le *figure* del piano.
Si dice anche che l'*ambiente* della geometria piana è il piano.
Lo studio della geometria dello spazio sarà affrontato nell'Unità G13.

Figure uguali

DEFINIZIONE

Figure uguali. Diremo che due figure sono **uguali** (o **congruenti**) quando, con un movimento, è possibile portare una di esse a coincidere punto per punto con l'altra.

Ciò significa che, a movimento compiuto, ogni punto A della prima figura $\mathcal{F}$ si sovrappone a un punto A' della seconda figura $\mathcal{F}'$ e che ogni punto B' della $\mathcal{F}'$ coincide con un punto B della $\mathcal{F}$. I punti A, B, ... della figura $\mathcal{F}$ si dicono **corrispondenti** rispettivamente dei punti A', B', ... della figura $\mathcal{F}'$.

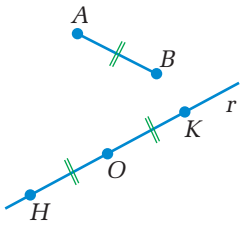
Nella geometria piana si accettano come movimenti sia quelli con cui si sposta una figura facendola strisciare sul piano, sia quelli che avvengono nello spazio, come il *ribaltamento*. Quest'ultimo si realizza concretamente, ad esempio, quando si volta la pagina di un libro.

Le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva valgono, in geometria, oltre che per l'uguaglianza, anche per altre relazioni tra figure (parallelismo fra rette, similitudine fra triangoli ecc.).

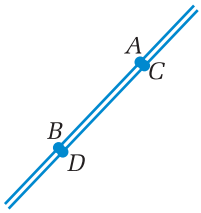
L'uguaglianza delle figure gode delle tre seguenti proprietà:

1. **riflessiva:** ogni figura è uguale a sé stessa;
2. **simmetrica:** se una prima figura è uguale a una seconda, anche la seconda è uguale alla prima;
3. **transitiva:** se una prima figura è uguale a una seconda e questa è uguale a una terza, allora la prima e la terza figura sono uguali fra loro.

Descriviamo ora due semplici proprietà dei movimenti rigidi.



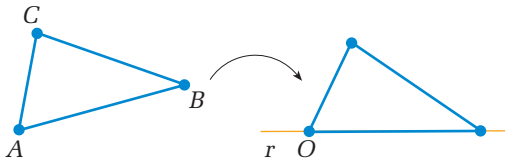
- Dati un segmento AB, una retta r e un punto O su r, ci sono due (e solo due) possibilità per trasportare AB su r, in modo che un estremo di AB coincida con O. In altre parole, esistono due punti H e K di r, che giacciono da parti opposte rispetto a O, tali che i segmenti HO e OK sono uguali ad AB.



- Dati due segmenti uguali AB e CD, è possibile portarli a coincidere sia in modo che A vada su C e B su D, sia in modo che A vada su D e B su C; in entrambi i casi, la retta AB viene a coincidere con la retta CD.

Dall'ultima proprietà enunciata discende che, date due rette, si può sempre, con un opportuno movimento, portare la prima a coincidere con la seconda. Pertanto, **tutte le rette sono uguali**.

I movimenti rigidi descritti nelle proprietà precedenti si possono anche applicare a una figura a cui appartengono i punti A e B. Ad esempio, dati un triangolo ABC, una retta r e un suo punto O, si può trasportare il triangolo in modo che il lato AB vada sulla retta r, con A su O.



L'uguaglianza è un concetto geometrico fondamentale. Molte definizioni fanno riferimento esplicito all'uguaglianza.

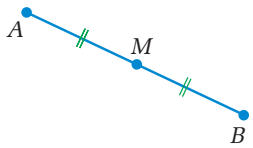
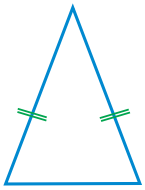
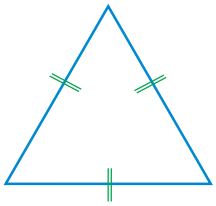
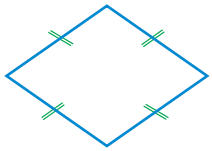
PER SAPERNE DI PIÙ

Uguaglianza e congruenza

In alcune trattazioni vengono considerate *uguali* solo le figure coincidenti, cioè si stabilisce che ''ogni figura è uguale solo a sé stessa''; si chiamano, poi, *congruenti*, due figure che possono essere portate a coincidere punto per punto mediante un movimento rigido.

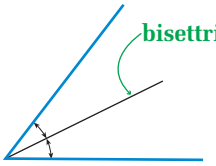
Per chiarire la cosa consideriamo un esempio non geometrico. Ogni anno vengono messe in circolazione in Italia migliaia e migliaia di monete da 1 euro. Due qualunque di esse (se non sono difettose) sono state costruite con gli stessi metalli, hanno uguali dimensioni, presentano gli stessi disegni sulle due facce ecc. Ma sono la stessa moneta? Evidentemente no: basti pensare che verranno usate da persone diverse, a scopi diversi. Ebbene, se si vuole riservare l'aggettivo *uguali* al caso in cui si parla della stessa moneta, è necessario introdurre una nuova parola, l'aggettivo *congruenti*, per indicare monete distinte, ma identiche in ogni loro particolare.

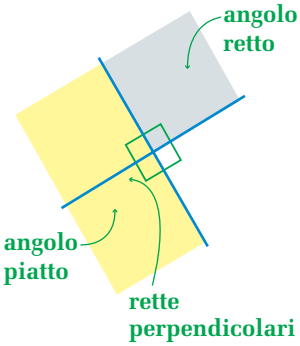
Per non appesantire la trattazione, noi, normalmente, non faremo questa distinzione e chiameremo *uguali* sia due figure coincidenti, sia due figure che possono essere portate a coincidere mediante movimento.

DEFINIZIONE	Il **punto medio** di un segmento è l'unico punto del segmento che lo divide in due parti *uguali*.	Un triangolo con due lati *uguali* si chiama **isoscele**.	Un triangolo con tutti e tre i lati *uguali* si chiama **equilatero**.	Un quadrilatero con i quattro lati *uguali* si chiama **rombo**.
FIGURA				

3. Bisettrice, angoli retti e rette perpendicolari

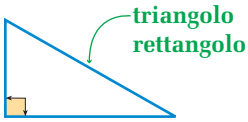
La **bisettrice** di un angolo è l'unica semiretta che lo divide in due parti uguali.
Due rette si dicono **perpendicolari** se dividono il piano in quattro angoli uguali; ciascuno di tali angoli è chiamato **angolo retto**.
La somma di due angoli retti forma un **angolo piatto**.

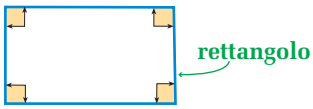




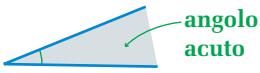
La conoscenza degli angoli retti permette nuove definizioni.

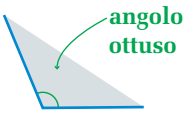
- Un triangolo con un angolo retto si dice **triangolo rettangolo**.
- Un quadrilatero con quattro angoli retti si dice **rettangolo**.



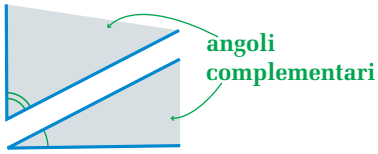


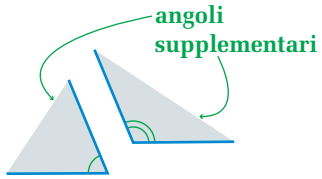
- Un angolo si dice **acuto** se è minore di un angolo retto.
- Un angolo si dice **ottuso** se è maggiore di un angolo retto ma minore di un angolo piatto.



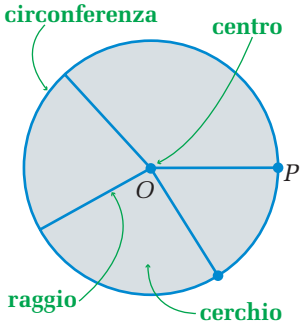


- Due angoli si dicono **complementari** se la loro somma è uguale a un angolo retto.
- Due angoli si dicono **supplementari** se la loro somma è uguale a un angolo piatto.





4. Gli strumenti del disegno geometrico: riga e compasso



La riga e il compasso sono due strumenti che tutti conosciamo bene.
Nella pratica, con la riga si riescono a tracciare solo segmenti, ma nella teoria geometrica si ammette, in astratto, che una *riga* sia illimitata e quindi permetta di disegnare delle rette. Inoltre, nella pratica la riga è usata anche per determinare la lunghezza di segmenti, mentre nella teoria geometrica la *riga* va sempre intesa senza la graduazione in centimetri.
Con il *compasso* si disegnano **circonferenze**: si fissa la punta non scrivente in un punto O e con la punta scrivente si traccia una linea chiusa. Siccome l'apertura del compasso non varia, *tutti i punti della circonferenza hanno la stessa distanza dal punto O*.
Il punto O è detto **centro** della circonferenza; la parte finita di piano limitata dalla circonferenza (in grigio in figura) è detta **cerchio**. La distanza da O di ciascuno dei punti della circonferenza (ad esempio OP in figura) è detta **raggio**.

STRATEGIE

Come realizzare costruzioni geometriche chiare e corrette

All'interno di questo volume sono illustrate varie costruzioni con riga e compasso. Ne studieremo alcune, abbastanza complesse, nell'Unità G7. Qui vediamo subito alcune importanti osservazioni sul disegno geometrico.

1. Quando si disegna una figura è opportuno *evitare casi particolari.* Ad esempio, se dobbiamo risolvere un problema in cui si parla di un triangolo, non conviene disegnare un triangolo isoscele (o pressoché isoscele), perché questo potrebbe trarci in inganno, suggerendoci proprietà che non valgono in generale.
2. Bisogna cercare, naturalmente, che le figure risultino *chiare* e, per quanto possibile, *precise*: una figura pasticciata finirà per confondere i successivi ragionamenti.
3. D'altra parte, non occorre mai dimenticare che una figura ha solo un valore schematico; cioè, per quanto disegnata con attenzione, è sempre una *rappresentazione approssimata* degli enti geometrici in questione.
4. Alcuni *software geometrici* (come *GeoGebra, Cabri Géomètre* o *CaR*) permettono di realizzare figure più precise e pulite di quelle che normalmente facciamo con riga e compasso.

5. Misure

Lunghezza di un segmento

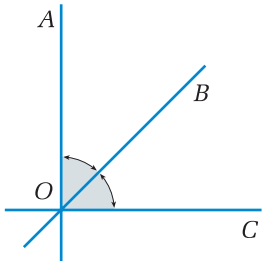
$AB = 3u \qquad \overline{AB} = 3$

Che cosa significa "misurare un segmento AB"? Fissato un segmento u da assumere come unità di misura (ad esempio, il metro), si tratta di stabilire quante volte u è contenuto in AB. Salvo casi particolari, u non è contenuto un numero intero di volte in AB per cui si considerano via via i sottomultipli di u (ad esempio il decimetro, il centimetro, ...), fino ad arrivare al grado di approssimazione desiderato. La misura di AB è un *numero*, che viene detto **lunghezza di** AB e indicato con il simbolo $\overline{AB}$.
La somma dei lati di un poligono è detta **perimetro**. Pertanto, la somma delle lunghezze dei lati di un poligono è la misura del perimetro del poligono.
Si può definire anche la lunghezza di una curva che non sia composta da segmenti: si pensi, ad esempio, alla lunghezza di una strada non rettilinea.
Se consideriamo, in particolare, una circonferenza, la sua lunghezza è data da $2\pi r$, dove:

- r è la lunghezza del raggio;
- il simbolo π (leggi: *pi greco*) indica il numero 3,141592... Come valore approssimato di π si assume molto spesso 3,14.

Ampiezza di un angolo

$\widehat{AOC} = 90°$

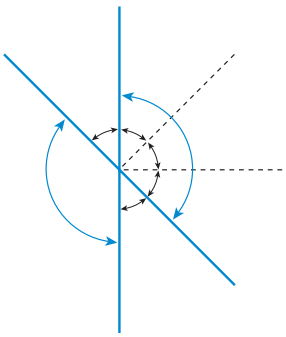


Per quanto riguarda gli angoli, è stata fissata convenzionalmente come unità di misura la novantesima parte dell'angolo retto, che è chiamata **grado**. La misura di un angolo è detta anche **ampiezza** dell'angolo. Ricordiamo poi che:

- il *primo* è $\frac{1}{60}$ del grado; in simboli si scrive $1° = 60'$;
- il *secondo* è $\frac{1}{60}$ del primo, cioè $\frac{1}{3600}$ del grado; in simboli si scrive $1' = 60''$ o anche $1° = 3600''$.

Un angolo che sia, ad esempio, la somma di 25 gradi, 38 primi e 42,5 secondi, si indica con la scrittura $25°\ 38'\ 42{,}5''$.

ESEMPIO



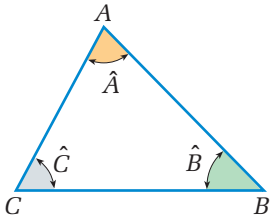
Due rette incidenti formano quattro angoli, due dei quali sono uno il triplo dell'altro. Determiniamo le ampiezze dei quattro angoli.

Una volta disegnata la figura, si osserva che i quattro angoli formati dalle due rette incidenti sono uguali a due a due (come vedremo meglio nell'Unità G1, due *angoli opposti al vertice* sono uguali). Pertanto, i due angoli di cui si parla sono *supplementari*: la loro somma è un angolo piatto, cioè un angolo di 180°.
Il fatto che l'angolo maggiore sia il triplo del minore, significa che possiamo dividere l'angolo più grande in tre parti, uguali fra loro e uguali all'angolo più piccolo. Abbiamo così trovato che l'angolo più piccolo è la quarta parte di un angolo piatto e quindi la sua ampiezza è $180° : 4 = 45°$; l'altro angolo misura perciò $180° - 45° = 135°$.

6. Angoli dei triangoli

Enunciamo due proprietà relative agli angoli di un triangolo (nelle prossime Unità dimostreremo tali proprietà).

$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$

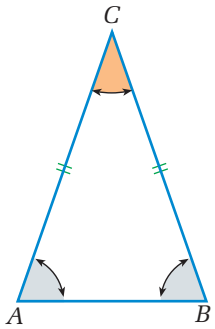


TEOREMA

La somma degli angoli di un triangolo è uguale a un angolo piatto, cioè a due angoli retti (180°).

ESEMPIO

In un triangolo *ABC*, abbiamo $\widehat{A}=70°$, $\widehat{C}=10°$. Il terzo angolo può allora essere trovato come differenza tra 180° e la somma $\widehat{A}+\widehat{B}$ dei due angoli noti: si ha $\widehat{B}=180°-(\widehat{A}+\widehat{C})=180°-80°=100°$.

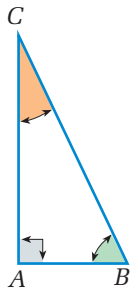


TEOREMA

Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.

Dalle due proprietà precedenti, si deducono altre proprietà.

- Se un triangolo *ABC* è equilatero, allora l'ampiezza di ciascuno degli angoli è uguale a 60° (per convincersene, basta ricordare che un triangolo equilatero è un particolare triangolo isoscele e osservare che $180° : 3 = 60°$).
- I due angoli acuti di un triangolo rettangolo *ABC* sono complementari. (Infatti, se *A* è il vertice dell'angolo retto, da $90°+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$ si deduce $\widehat{B}+\widehat{C}=180°-90°=90°$.)
- Un triangolo rettangolo e isoscele ha due angoli di 45° (infatti si ha: $90° : 2 = 45°$).



Ricordiamo anche che la somma degli angoli di un quadrilatero è uguale a due angoli piatti. Più in generale, *la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è uguale a* $n-2$ *angoli piatti.*

SI PUÒ FARE COSÌ

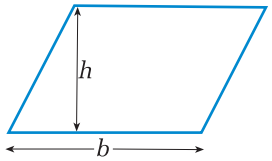
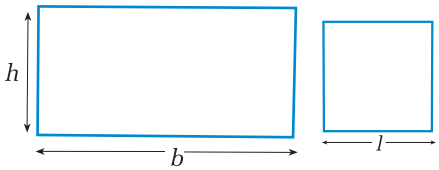
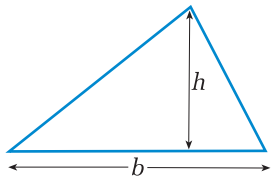
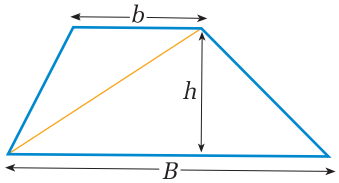
I segnali stradali e le forme geometriche

Per superare l'esame per il patentino è necessario conoscere i segnali stradali. Ce ne sono di varie forme, ognuna delle quali ha un ben preciso significato. Sapresti dire, aiutandoti con gli esempi illustrati nella fotografia, che forma hanno i segnali di pericolo? Quelli di divieto? Le indicazioni direzionali? Il segnale di strada con precedenza? Quello di velocità consigliata? Sai citare qualche proprietà delle corrispondenti figure geometriche?

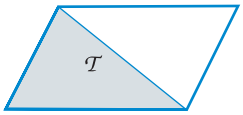
- Il segnale di incrocio ha forma triangolare. In effetti, tutti i segnali di pericolo hanno forma di triangolo equilatero.
- Il segnale di divieto di accesso è formato da un cerchio rosso, con un rettangolo bianco all'interno. Tutti i segnali di divieto hanno forma circolare.
- Tutte le indicazioni direzionali hanno forma rettangolare.
- Il segnale di strada con precedenza è un quadrato, con i lati obliqui rispetto alla verticale.
- Il segnale di velocità consigliata è un quadrato blu con un numero bianco, che indica la velocità ideale da tenere in quel tratto di strada.

7. Aree dei poligoni e del cerchio

La misura di una superficie rispetto a una fissata unità di misura è detta **area**. Ad esempio, fissato come unità di misura il m^2, dire che un poligono $\mathcal{P}$ ha area 4,5 significa che un metro quadrato è contenuto 4 volte e mezzo in $\mathcal{P}$: in altre parole, è possibile ritagliare 4 quadrati e mezzo di lato 1 m e, con i pezzi ottenuti, ricomporre il poligono $\mathcal{P}$.

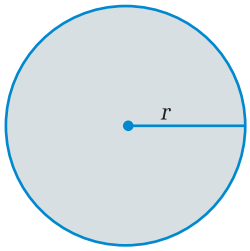
	NOME	DEFINIZIONE	AREA	FIGURA
1	parallelogramma	quadrilatero con i lati a due a due paralleli	bh	
2	rettangolo quadrato	quadrilatero con quattro angoli retti rettangolo con tutti i lati uguali	bh l^2	
3	triangolo	poligono di tre lati	$\frac{bh}{2}$	
4	trapezio	quadrilatero in cui solo due lati sono paralleli	$\frac{(B+b)\cdot h}{2}$	

Osserviamo che le formule della riga 2 sono casi particolari della formula 1 (rettangolo e quadrato sono particolari parallelogrammi). Anche la formula 3 si deduce dalla 1: dato infatti un triangolo $\mathcal{T}$, si possono disporre due triangoli uguali a $\mathcal{T}$ in modo da formare un parallelogramma con la stessa base e la stessa altezza di $\mathcal{T}$.



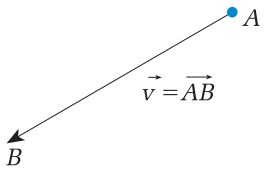
Dalla formula 3 discende un metodo generale per calcolare l'area di un qualsiasi poligono, dopo averlo scomposto in triangoli. La formula 4, per esempio, si può ottenere proprio per questa via: scomposto il trapezio dato in due triangoli aventi per basi rispettivamente le due basi del trapezio e per altezza l'altezza del trapezio, si ha:

$$\text{area trapezio} = \frac{hB}{2} + \frac{hb}{2} = h\frac{B+b}{2}$$



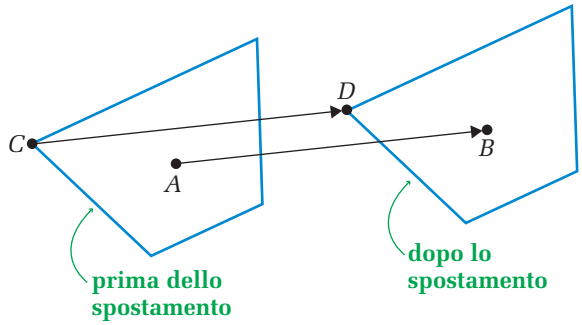
Infine, sia data la circonferenza con raggio di lunghezza r. Allora, l'area del cerchio è πr^2 e la lunghezza della circonferenza è $2\pi r$.

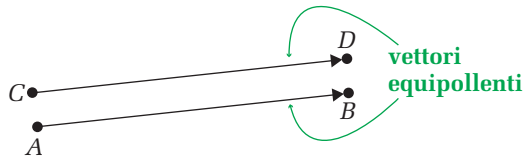
8. Vettori

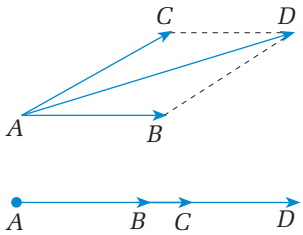


Per lo studio della fisica, può essere utile avere qualche conoscenza sui vettori; riprenderemo l'argomento all'inizio dell'Unità G8.
Si chiama **vettore** un segmento v su cui è stato fissato un *verso*, in base al quale distinguiamo fra *primo* estremo e *secondo* estremo. Se A è il primo estremo del segmento e B è il secondo estremo, il vettore si indica con la scrittura $\overrightarrow{AB}$, oppure con $\vec{v}$.
Nei disegni un vettore si indica con una freccia. Il punto A è detto anche *punto di applicazione* del vettore. Per il seguito occorre ricordare due definizioni che hai imparato nella Scuola Media.
Due rette r, s del piano si dicono **parallele** se non hanno alcun punto in comune oppure se coincidono (torneremo su questa definizione nell'Unità G3).
Un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli si chiama **parallelogramma**.
Sono parallelogrammi, fra gli altri, i rettangoli, i rombi, i quadrati.
In un senso intuitivo, un vettore ''descrive'' uno spostamento nel piano.
Due vettori che descrivono lo stesso spostamento si dicono **equipollenti** (o **equivalenti**). Più precisamente, due **vettori** $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono **equipollenti** se:

1. i segmenti AB, CD sono uguali (si dice allora che i due vettori hanno uguale **intensità**);
2. le rette AB e CD sono parallele (i due vettori hanno la stessa **direzione**);
3. l'ordinamento dei punti della retta AB, in cui A precede B, è concorde con l'ordinamento dei punti della retta CD nel quale C precede D (i due vettori hanno lo stesso **verso,** o verso concorde).







Per *sommare* due vettori $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{AC}$ che hanno lo stesso punto di applicazione A, si applica la *regola del parallelogramma*: si traccia per B la parallela alla retta AC e per C la parallela alla retta AB. Si ottiene così il parallelogramma $ABDC$: il vettore $\overrightarrow{AD}$ è la *somma* dei vettori $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{AC}$.
Se i due vettori $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{AC}$ giacciono su una stessa retta, allora la somma è un vettore $\overrightarrow{AD}$ che giace sulla stessa retta e tale che la lunghezza di $\overrightarrow{AD}$ sia la *somma algebrica* delle lunghezze di $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{AC}$.

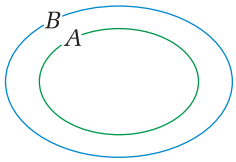
9. Intersezione e unione di figure

In matematica si usa il vocabolo **insieme** per indicare un qualunque raggruppamento di enti comunque scelti. Ad esempio, una figura geometrica è un insieme di punti; possiamo anche considerare l'insieme dei triangoli, l'insieme dei poligoni, l'insieme dei vertici di un poligono, ecc.
Fra gli insiemi si accetta anche quello privo di elementi, o **insieme vuoto**, che viene indicato con il simbolo "$\varnothing$".

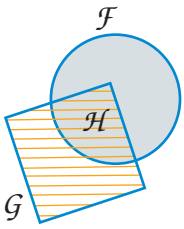
ESEMPIO

È vuoto l'insieme dei triangoli aventi due angoli retti, o l'insieme dei punti comuni a due circonferenze con lo stesso centro e di raggio diverso.

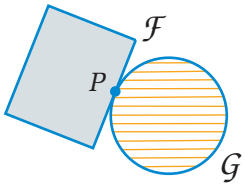
Se consideriamo l'insieme T dei triangoli e l'insieme P dei poligoni, ci accorgiamo che si verifica una situazione particolare: poiché ogni triangolo è un poligono, ogni elemento di T è anche elemento di P. Si dice, allora, che T è un *sottoinsieme* di P, ovvero che T è *contenuto* (o *incluso*) in P.
In generale, dati due insiemi A e B, si dice che A è **sottoinsieme** di B, se ogni elemento di A è anche elemento di B (invece, un elemento di B può sia appartenere sia non appartenere ad A). Se questo accade, si scrive $A \subseteq B$ e si legge "*A è contenuto in B*" o "*A è un sottoinsieme di B*".



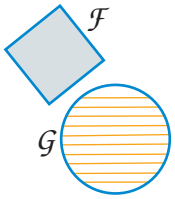
Consideriamo ora due figure A e B, cioè due insiemi A e B di punti.
Si chiama **intersezione** di A e B (e si indica col simbolo $A \cap B$) l'insieme formato dai punti che appartengono tanto ad A quanto a B.
L'intersezione di due figure $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ è a sua volta una figura, che può ridursi a un sol punto, o essere addirittura priva di punti.



$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{H}$

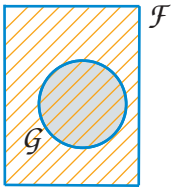


$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = P$



$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varnothing$

Si chiama **unione** di A e B (e si indica con il simbolo $A \cup B$) l'insieme formato dai punti che appartengono solamente ad A, dai punti che appartengono solamente a B e da quelli comuni ad A e a B. Anche l'unione di due figure $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ è una figura.



$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{G}$
$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \mathcal{F}$

Due insiemi privi di elementi comuni, cioè tali che la loro intersezione è l'insieme vuoto, si dicono **disgiunti**. Ad esempio, sono disgiunti l'insieme dei triangoli rettangoli e l'insieme dei triangoli equilateri.
Osserviamo che se B è un sottoinsieme di A, allora $A \cap B = B$ e $A \cup B = A$.

ESERCIZI DI PARAGRAFO

1. Rette, angoli e poligoni 2. Movimenti rigidi e figure uguali 3. Bisettrice, angoli retti e rette perpendicolari

LE FIGURE E IL LINGUAGGIO

Disegna le seguenti figure geometriche (ove necessario, fai uso di riga e compasso).

1 Un triangolo isoscele con tre angoli acuti. Un triangolo isoscele con un angolo ottuso.

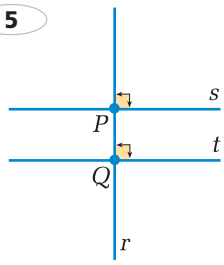
2 Un trapezio con tre lati uguali (*Disegna un trapezio isoscele in cui la base minore è ...*)

3 Un angolo retto, un angolo piatto e la metà di un angolo retto.

4 Una circoferenza e un quadrato con i vertici sulla circonferenza.

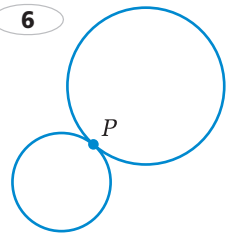
Descrivi a parole le seguenti figure geometriche.

5



ci sono una retta r e due rette s e t che sono ..... ad r: i punti P e Q sono .....

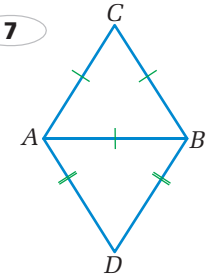
6



.....

.....

7

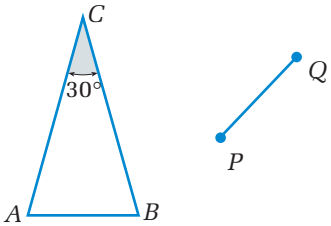


.....

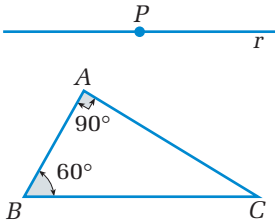
.....

QUESITI E PROBLEMI

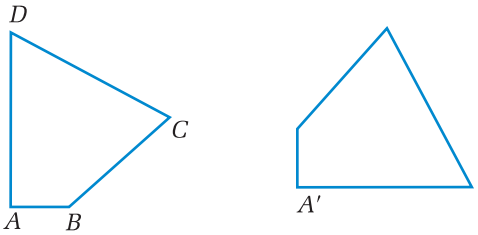
8 Costruisci un triangolo isoscele uguale al triangolo ABC che abbia come base il segmento PQ (*figura a fianco*). In quanti modi si può risolvere l'esercizio?



●● **9** Costruisci un triangolo $A'B'C'$ uguale al triangolo ABC, che abbia il vertice B' nel punto P e l'ipotenusa $B'C'$ sulla retta r. L'esercizio si può risolvere in 4 modi: sai trovarli tutti?

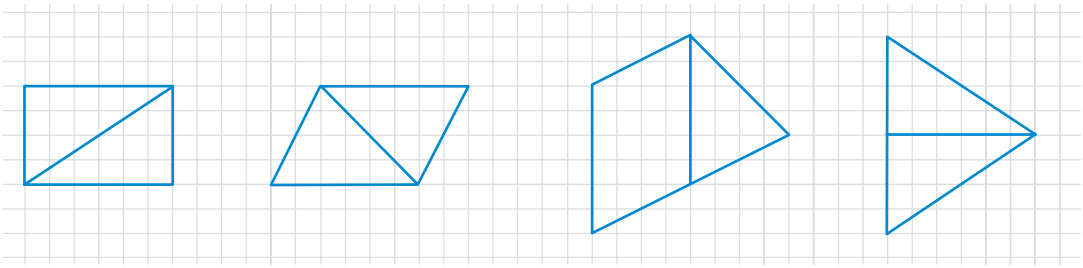


● **10** I due quadrilateri $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sono uguali. Assegna le lettere ai vertici della seconda figura in modo che i vertici corrispondenti siano indicati con la stessa lettera.



• **11** Disegna un triangolo (non isoscele), trova i punti medi dei lati e poi disegna i tre segmenti che collegano a due a due tale punti. In quanti parti è diviso il triangolo? Come sono tra loro queste parti? (*Rispondi osservando la figura, senza preoccuparti per ora di spiegare in modo rigoroso il motivo della tua risposta.*)

•• **12** Nella figura sono disegnati un rettangolo, un parallelogramma, un trapezio e un triangolo. Considerando anche le parti in cui tali poligoni sono scomposti dai segmenti disegnati in figura, sai riconoscere tutti i poligoni uguali?



CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

13 Due rette distinte possono avere più di un punto in comune. V F

14 Il complementare di un angolo acuto è sempre un angolo ottuso. V F

15 Il supplementare di un angolo ottuso è sempre un angolo acuto. V F

16 È possibile definire il punto medio sia di un segmento sia di una retta. V F

17 Una diagonale di un rombo lo scompone in due triangoli isosceli. V F

4. Gli strumenti del disegno geometrico: riga e compasso
5. Misure 6. Angoli dei triangoli

QUESITI E PROBLEMI

• **18** Facendo uso del compasso disegna un triangolo equilatero (*Prima disegna un segmento AB, poi la circonferenza di centro A passante per B e la .....*). Quindi verifica con un goniometro che i tre angoli sono uguali.

• **19** Disegna con riga e compasso un trapezio che abbia i 4 vertici su una circonferenza. Di che tipo di trapezio si tratta?

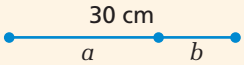
• **20** Disegna una circonferenza e una retta che abbiano un solo punto P in comune (retta tangente). Unisci tale punto P con il centro O del cerchio. Verifica che la retta e il segmento OP formano due angoli retti.

21 Il perimetro di un rettangolo è 1 m. Se la base è di 30 cm, quanto è lunga l'altezza? [20 cm]

22 Il perimetro di un triangolo isoscele è 2,5 m. Se la base è di 70 cm, quanto è lungo ciascun lato? [90 cm]

ESERCIZIO SVOLTO

23 Determina la lunghezza di due segmenti sapendo che la loro somma è 30 cm e che il maggiore supera di 8 cm il minore.



Indichiamo con a e b i segmenti di cui vogliamo determinare le lunghezze. Indichiamo con a il maggiore dei due; quindi, passando alle misure, $a = b + 8$. Sappiamo che la somma è 30 cm, quindi $b + 8 + b = 30$. Cioè vuol dire che $b = 11$ cm. Da questa informazione ricaviamo subito che $a = 19$ cm.

• **24** Calcola la lunghezza di due segmenti sapendo che la loro differenza è di 12 cm e che uno di essi è il doppio dell'altro. [12 cm, 24 cm]

• **25** Determina la lunghezza di due segmenti, sapendo che uno di essi è il triplo dell'altro e che la loro somma è 160 cm. [40 cm, 120 cm]

• **26** Due angoli sono complementari e uno supera l'altro di 20°. Quali sono le ampiezze dei due angoli? [35°, 55°]

• **27** Un angolo è il doppio del suo complementare. Qual è la sua ampiezza? [60°]

• **28** Un angolo è il triplo del suo supplementare. Qual è la sua ampiezza? [135°]

• **29** Due angoli sono complementari ed uno è $\frac{1}{6}$ di un angolo piatto. Qual è l'ampiezza dell'altro? [60°]

• **30** La somma di due angoli è $\frac{4}{5}$ di un angolo piatto ed uno è il doppio dell'altro. Che ampiezza hanno i due angoli? [48°, 96°]

• **31** L'ampiezza di un angolo è di 52° 18′; qual è l'ampiezza del suo supplementare? [127° 42′]

• **32** Due angoli hanno ampiezza di 17° 12′ 30″ e 22° 27′ 30″. Determina l'ampiezza dell'angolo complementare della loro somma. [50° 20′]

• **33** Sapendo che le ampiezze di due angoli di un triangolo sono rispettivamente di 42° e 65°, calcola l'ampiezza del terzo angolo. [73°]

•• **34** Un triangolo ha un angolo di 33° 27′ e un altro angolo di 56° 33′. Di che tipo è tale triangolo? Perché?

•• **35** Un triangolo ha un angolo di 75° e un altro angolo di 52° 30′. Di che tipo è tale triangolo? Perché?

•• **36** Calcola il perimetro di un quadrato sapendo che un suo lato ha lunghezza uguale al lato di un triangolo equilatero di perimetro 27 cm. [36 cm]

• **37** Un triangolo equilatero e uno isoscele hanno lo stesso perimetro. Nel triangolo isoscele ciascuno dei lati uguali è il doppio della base mentre il lato del triangolo equilatero misura 10,5 cm. Calcola la lunghezza della base del triangolo isoscele. [63 mm]

• **38** Un pentagono è formato da un quadrato e da un triangolo equilatero con un lato in comune. Il pentagono ha tutti i lati uguali? Quali sono le ampiezze degli angoli del pentagono? Calcola il perimetro del pentagono sapendo che l'area del quadrato è 49 cm^2. [...; 150°; 35 cm]

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- **39** Se due angoli di un triangolo sono complementari, allora il triangolo è rettangolo. V F
- **40** Un segmento che unisce due punti qualsiasi di una circonferenza è un diametro. V F
- **41** Per un punto qualsiasi di una circonferenza passa uno e un solo diametro. V F
- **42** Una retta interseca una circonferenza sempre in due punti. V F
- **43** La lunghezza di una circonferenza è maggiore del triplo del suo diametro. V F

7. Aree dei poligoni e del cerchio 8. Vettori

44 L'area di un parallelogramma è 360 cm^2. Quanto è lunga l'altezza, se la base è 0,9 m?

45 Calcola la lunghezza della base di un triangolo sapendo che l'altezza è il doppio della base e che l'area è 0,64 m^2. [80 cm]

46 In un trapezio la base minore è lunga 15 cm, la differenza fra la base maggiore e la base minore è 5 cm e l'altezza supera di 5 cm la somma delle basi. Quale è l'area del tapezio? [700 cm^2]

ESERCIZIO SVOLTO

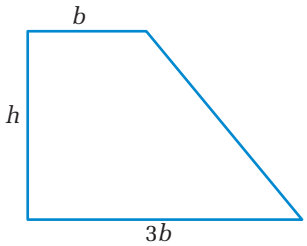
47 Calcola l'area di un cerchio avente il raggio uguale al lato di un triangolo equilatero di perimetro 15 cm.

Poiché il triangolo equilatero ha perimetro 15 cm, il suo lato misura 5 cm. Questa è dunque la lunghezza del raggio del cerchio. L'area cercata è 25 π cm^2.

48 La lunghezza di una circonferenza è 40 π cm. Calcola l'area del cerchio. [400 π cm^2]

49 L'area di un cerchio è 169 π cm^2. Calcola la lunghezza della corrispondente circonferenza. [26 π cm]

•• **50** L'altezza di un trapezio rettangolo è la metà della somma delle basi e la base maggiore è il triplo della minore. Che ampiezza ha l'angolo acuto del trapezio? Se l'altezza è di 0,06 m, qual è l'area del trapezio? [36 cm^2]



•• **51** L'area di un cerchio di raggio 25 cm è maggiore o minore dell'area di un trapezio avente la base maggiore, la base minore e l'altezza rispettivamente di 50 cm, 30 cm e 40 cm?

Risolvi i seguenti esercizi sui vettori.

52 Su un foglio di carta a quadretti, disegna due vettori equipollenti e altri due vettori non equipollenti.

53 Disegna due vettori $\overrightarrow{OA}$ ed $\overrightarrow{OB}$, che giacciono su una stessa retta, ma hanno verso opposto. Se i due vettori hanno la stessa lunghezza, a che cosa è uguale la loro somma?

54 Se due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono equipollenti, che cosa puoi dire dei vettori $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$?

55 Disegna due vettori con lo stesso punto di applicazione che non giacciano su una stessa retta. Disegna poi il vettore somma dei due vettori.

•• **56** Sia *ABCD* un parallelogramma. A che cosa è uguale la somma dei vettori individuati dalla diagonale *AC* e dal lato *CB*? Perché? [al vettore individuato dal lato *AB*]

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

57 Due poligoni uguali hanno la stessa area. V F

• **58** Due quadrati con la stessa area sono necessariamente uguali. V F

• **59** Due rettangoli con la stessa area sono necessariamente uguali. V F

9. Intersezione e unione di figure

60 Disegna due rettangoli in modo che la loro intersezione sia ancora un rettangolo.

61 Disegna due rettangoli in modo che la loro intersezione non sia un rettangolo.

• **62** Disegna due triangoli in modo che la loro intersezione sia un quadrilatero.

•• **63** Disegna due triangoli in modo che la loro unione sia un esagono.

• **64** Disegna due quadrilateri in modo che la loro intersezione sia un triangolo.

• **65** Disegna due quadrilateri in modo che la loro unione sia un esagono.

CONTROLLA LA TUA COMPRENSIONE

Stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

66 L'insieme dei punti di una semiretta è un insieme finito. V F

67 L'insieme dei quadrilateri con tutti gli angoli acuti è vuoto. V F

68 L'insieme degli esagoni è un sottoinsieme dell'insieme dei poligoni con tutti gli angoli e i lati uguali. V F

69 L'intersezione di due insiemi è sempre un sottoinsieme della loro unione. V F

Controlla la tua comprensione: Paragrafi 1, 2, 3: F, F, V, F, V; Paragrafi 4, 5, 6: V, F, V, F, V; Paragrafi 7, 8: V, V, F; Paragrafo 9: F, V, F, V.

ESERCIZI DI FINE UNITÀ

E-TRAINER

PROBLEMI RISOLUBILI PER VIA ARITMETICA

1 In un triangolo la base misura 9 cm e l'altezza misura 8 cm. Qual è il perimetro di un quadrato che ha la stessa area del triangolo? [24 cm]

2 La base minore di un trapezio isoscele misura 2 cm, l'altezza è uguale alla base minore e i lati obliqui formano con la base maggiore un angolo di 45°. Determina l'area del trapezio. [8 cm^2]

3 Un triangolo isoscele ha il perimetro di 14 cm e ciascuno dei suoi lati uguali misura 54 mm. Calcola la lunghezza della base del triangolo. [32 mm]

4 La somma di tre segmenti è 37,2 cm. Il primo e il secondo sono rispettivamente il doppio ed il triplo del terzo. Calcola la misura dei tre segmenti. [12,4 cm, 18,6 cm, 6,2 cm]

5 Il perimetro di un trapezio isoscele è 3 m. La base maggiore è il doppio della minore e la loro differenza è 70 cm. Calcola la lunghezza dei lati obliqui. [45 cm]

6 Calcola l'ampiezza degli angoli di un triangolo sapendo che uno di essi è il doppio di un altro e che il terzo misura 78°. [34°, 68°]

7 Disegna un triangolo rettangolo isoscele e traccia le bisettrici dei due angoli acuti. Qual è l'ampiezza degli angoli formati dalle due bisettrici? [45° e 135°]

8 In un triangolo *ABC* la somma dei lati *AB* e *BC* misura 23 dm, mentre la loro differenza misura 70 cm. Inoltre il lato *AC* è pari ai $\frac{3}{5}$ di *AB*. Determina il perimetro del triangolo. [32 dm]

9 La somma di cinque angoli misura 167°; il primo misura 37° 15′, il secondo è complementare del primo e gli altri tre sono uguali tra loro. Calcola l'ampiezza di ciascun angolo. [52° 45′; 25° 40′]

10 In un triangolo isoscele la differenza fra un lato obliquo e la base è 2,9 cm, mentre la loro somma è 15,5 cm. Calcolane il perimetro. [24,7 cm]

11 Un triangolo equilatero ha l'area di 14 cm^2. Qual è l'area dell'esagono regolare che ha lo stesso lato del triangolo? (*Ricorda che un esagono regolare è formato da ... triangoli ...*) [84 cm^2]

12 Un quadrilatero *ABCD* è l'unione di due triangoli rettangoli *ABC* ed *ACD* con il cateto *AC* in comune. Nel triangolo *ABC* i due cateti *AC* e *BC* sono uguali, mentre nel triangolo *ACD* il cateto *AD* è metà dell'altro cateto *AC*. Inoltre la differenza fra i lati *AC* e *AD* è 18 cm. Calcola l'area del quadrilatero. È vero che il quadrilatero è un trapezio? [972 cm^2]

13 In un rombo *ABCD* la diagonale *AC* è maggiore della diagonale *BD*. L'area del triangolo *ABC* è maggiore, uguale o minore dell'area del triangolo *ABD*? Il perimetro del triangolo *ABC* è maggiore, uguale o minore del perimetro del triangolo *ABD*?

14 Fissa a piacere le ampiezze degli angoli di un triangolo *ABC*. Calcola poi la somma degli angoli esterni relativi ai vertici *A* e *B*: a quanto è uguale la differenza fra questa somma e l'angolo interno relativo al vertice *C*? [è sempre un angolo ...]

VERSO LE PROVE INVALSI

Risolvi i seguenti quesiti.

1 L'ampiezza di uno degli angoli alla base di un triangolo isoscele è 64°. L'ampiezza dell'angolo al vertice è

a. 52° b. 58° c. 64° d. 116°

2 I vertici di un quadrato sono punti di una circonferenza, lunga 30 π cm. L'area del triangolo rettangolo isoscele che si ottiene tracciando una diagonale del quadrato è .....
L'area del quadrato è .....

3 Di tre angoli a, b e c si sa che a e b sono tra loro complementari e che b e c sono tra loro supplementari.

a. L'angolo c è un angolo acuto, retto oppure ottuso? .....

b. Qual è la differenza fra gli angoli c ed a? .....

4 Sia $ABCD$ un rombo. Detti M e N i punti medi dei lati AB e CD, qual è il rapporto fra il perimetro del rombo $AMND$ e il perimetro del rombo dato?

a. 1 b. 1/2

c. 2/3 d. 3/4

5 Disegna due circonferenze la cui intersezione sia un punto; disegna poi una terza circonferenza che abbia due punti in comune con ciascuna delle prime due.

6 Siano I l'insieme dei triangoli isosceli, R l'insieme dei triangoli rettangoli e O l'insieme dei poligoni con almeno un angolo ottuso.

a. L'intersezione $I \cap R$ è vuota? ☐ sì ☐ no

b. L'intersezione $R \cap O$ è vuota? ☐ sì ☐ no

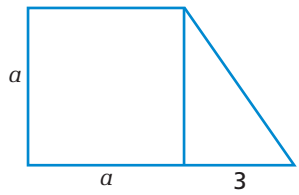
c. L'intersezione $O \cap I$ è vuota? ☐ sì ☐ no

7 *[Dall'esame di Stato per il primo Ciclo, 2008]*

Quale è il perimetro di un quadrato la cui area è di 100 m^2?
Risposta ..... m
Scrivi il procedimento che hai seguito.

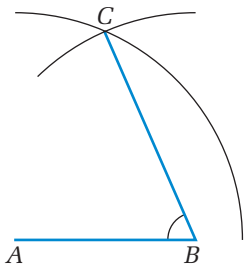
8 *[Dall'esame di Stato per il primo Ciclo, 2009]*

Scrivi la formula che esprime come varia l'area A della figura qui a fianco, al variare della lunghezza a.
$A =$ .....



9 *[Dall'esame di Stato per il primo Ciclo, 2009]*

Dati due punti A e B sono stati tracciati con lo stesso raggio, maggiore della metà del segmento AB, due archi di circonferenza, uno con centro in A e uno con centro in B. È stato chiamato C uno dei due punti di intersezione tra i due archi.



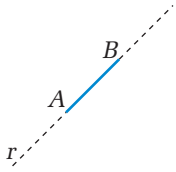
a. Se l'angolo $A\hat{C}B$ misura 40°, quanto misura l'angolo $A\hat{B}C$ segnato?

a. 50° b. 60° c. 70° d. 140°

b. (Osserva che il triangolo ABC è isoscele e, dunque, gli angoli in A e in B sono .....)
Scrivi il procedimento che hai seguito.

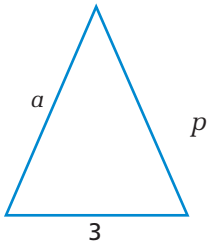
10 *[Dall'esame di Stato per il primo Ciclo, 2010]*

Qui sotto vedi una retta r sulla quale sono segnati due punti A e B. Disegna un triangolo rettangolo ABC in modo tale che il segmento AB sia un cateto. Indica con una crocetta l'angolo retto del triangolo.



11 *[Dall'esame di Stato per il primo Ciclo, 2010]*

Scrivi la formula che esprime il perimetro p del triangolo isoscele in figura in funzione del a.



$p =$ .....

MATEMATICA E MODELLI

La geometria dei recinti

In un prato pianeggiante si vuole realizzare un recinto rettangolare in cui allevare animali da cortile. A questo scopo, si deve costruire una palizzata, usando 20 elementi, della lunghezza di un metro ciascuno (uno di questi elementi rimarrà mobile, in modo da costituire la porta d'ingresso).
Un esempio di recinto potrebbe essere un rettangolo con i lati di 3 m e 7 m.

a. *Trova tutte le possibili misure dei lati del recinto.* [ci sono 5 possibili recinti ...]

Per ognuna di queste scelte l'area recintata sarà diversa: per esempio nel caso precedente l'area recintata sarà di 21 m^2.

b. *In quale caso l'area recintata è massima?* [25 m^2]

c. *In quale caso l'area recintata è minima?*

La situazione è analoga alla precedente, ma questa volta si vuole che la zona recintata, sempre di forma rettangolare, abbia area 36 m^2; per costruire la palizzata si hanno a disposizione molti elementi, ancora di un metro ciascuno.

d. *Quali sono le possibili misure del recinto?* [ci sono 5 possibili recinti]

e. *Quanti elementi sono necessari in ciascun caso? Qual è il numero minimo e quale il numero massimo di tali elementi?* [24 elementi, 74 elementi]