M. Cerini - R. Fiamenghi - D. Giallongo

Quaderno operativo 3

Trevisini Editore

La pubblicazione di un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

Nel caso di eventuali errori od omissioni nelle citazioni delle fonti, la Casa Editrice provvederà, nella prossima edizione, alle rettifiche che verranno comunicate dagli aventi diritto.

Nei casi in cui non è stato possibile reperire chi potesse concedere il permesso di riproduzione, si precisa che la Casa Editrice è a disposizione degli aventi diritto.

Progetto grafico e impaginazione elettronica: BAMA - Vaprio d'Adda

Copertina: Areaimmagine - Milano

Il contenuto di questo testo rispetta l'art. 5 della legge 169 del 30/10/08 e, pertanto, non sarà modificato per 5 anni.

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

I diritti di traduzione, riproduzione e di adattamento, totale o parziale, con qualsiasi mezzo, compreso fotocopie in bianco e nero o a colori, sono riservati.

© 2010 Casa Editrice Luigi Trevisini S.r.l.

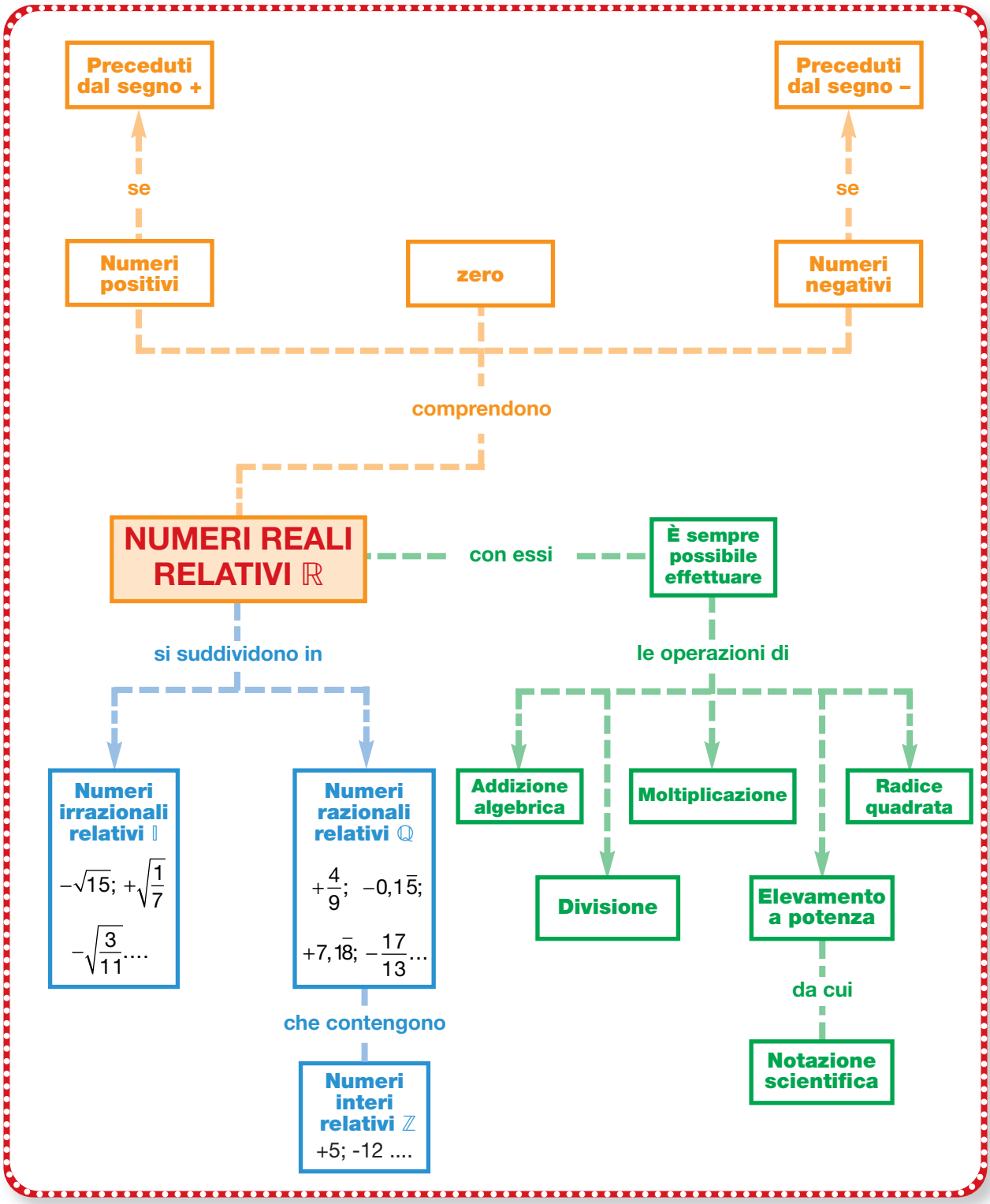
Prima edizione: gennaio 2010

Edizione: 1 2 3 4 5 2010 2011 2012 2013 2014

Con i tipi della:
Casa Editrice Luigi Trevisini S.r.l.
Via Tito Livio 12
20137 Milano
Tel. 02 5450704 - Fax 02 55195782

Sito internet: http://www.trevisini.it
Posta Elettronica: trevisini@trevisini.it

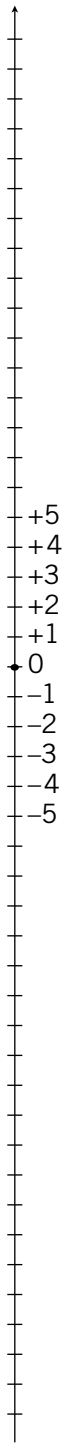
ESERCIZI E ATTIVITÀ PER IL RECUPERO E PER IL POTENZIAMENTO



RECUPERO

Prima di effettuare gli esercizi per il recupero è opportuno che tu riveda la teoria sul libro di testo.

1. Completa la retta orientata e usala per risolvere le seguenti operazioni (*ricorda che il segno + ti fa "spostare" verso l'alto e il segno – verso il basso*).



a) + 7 + 4

posizionati su + 7 e spostati verso l'alto di 4 unità, scrivi il numero che corrisponde alla posizione di arrivo:

+ 7 + 4 = ...

b) + 5 – 12

posizionati su + 5 e spostati verso il basso di 12 unità:

+ 5 – 12 = ...

c) + 9 – 23

posizionati su + 9 e spostati verso il basso di 23 unità:

+ 9 – 23 = ...

d) – 9 – 6

posizionati su – 9 e spostati verso il basso di 6 unità:

– 9 – 6 ...

e) – 5 – 4

posizionati su – 5 e spostati verso il basso di 4 unità:

– 5 – 4 = ...

f) – 8 + 11

posizionati su – 8 e spostati verso l'alto di 11 unità:

– 8 + 11 = ...

g) – 13 + 17

posizionati su – 13 e spostati verso l'alto di 17 unità:

– 13 + 17 = ...

h) + 12 – 20

posizionati su + 12 e spostati verso il basso di 20 unità:

+ 12 – 20 = ...

i) – 10 + 14

posizionati su – 10 e spostati verso l'alto di 14 unità:

– 10 + 14 = ...

2. Esegui le addizioni utilizzando la retta orientata:

+ 12 + 7 = ...
+ 12 – 7 = ...
– 12 + 7 = ...
– 12 – 7 = ...
+ 13 – 13 = ...
– 13 + 13 = ...
+ 8 + 11 = ...
+ 8 – 11 = ...
– 8 + 11 = ...
– 8 – 11 = ...

3. Facendo riferimento agli esercizi precedenti completa le frasi (utilizza i termini assegnati): somma - differenza - maggiore - concorde

- se si addizionano due **numeri relativi concordi** si ottiene un numero..... agli addendi che ha per valore assoluto la ..... dei valori assoluti;
- se si addizionano due **numeri relativi discordi** si ottiene un numero che ha il segno dell'addendo con valore assoluto ..... e come valore assoluto la ..... dei valori assoluti.

4. Risolvi le seguenti addizioni seguendo le indicazioni.

a) + 15 – 8

+ 15 ha valore assoluto maggiore di – 8, il risultato ha segno + ; il valore assoluto del risultato è la differenza tra 15 e 8; quindi:

+ 15 – 8 = + ...

controlla il risultato sulla retta orientata.

b) – 18 + 11

– 18 ha valore assoluto maggiore di + 11, la differenza tra 18 e 11 vale 7; quindi il risultato è: – 18 + 11 = ... 7

controlla il risultato sulla retta orientata.

c) + 22 – 25

– 25 ha valore assoluto maggiore, la differenza tra 25 e 22 vale .....; quindi il risultato è:

+ 22 – 25 = ...

controlla il risultato sulla retta orientata.

d) $-11+19$

$+19$ ha valore assoluto maggiore; la differenza tra 19 e 11 è.....; quindi:

$-11+19=$ .....

controlla il risultato.

e) $+15+8$

il risultato è positivo come gli addendi e il suo valore assoluto è la somma di 15 e 8; quindi:

$+15+8=+$ .....

controlla il risultato.

f) $-5-13$

il risultato è negativo come gli addendi; devi sommare i valori assoluti 5 e 13; quindi:

$-5-13=-$ .....

controlla il risultato.

g) $-9-7$

devi sommare i valori assoluti 9 e 7; quindi:

$-9-7=-$ .....

controlla il risultato.

Esegui le seguenti addizioni (procedi come nell'esercizio precedente).

5. $+11-9=$ ..... $+29+3=$ .....

6. $-23-5=$ ..... $-15+21=$ .....

7. $+18-20=$ ..... $-7-13=$ .....

8. $-16-11=$ ..... $+25-19=$ .....

9. Esegui le seguenti addizioni seguendo le indicazioni.

a) $+\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)$

scrivi gli addendi in forma semplificata, determina il m.c.d. (minimo comune denominatore) tra 3 e 4, esegui il calcolo:

$$+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{+8-3}{12}=\frac{.....}{12}$$

b) $-\frac{3}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)$

scrivi gli addendi in forma semplificata, determina il m.c.d. tra 5, 2 e 3, esegui il calcolo sommando prima i due addendi negativi e poi quello positivo:

.....

$$=\frac{-33+20}{30}=.....$$

c) $+\frac{7}{6}+(-2)+\left(-\frac{3}{8}\right)$

scrivi gli addendi in forma semplificata, determina il m.c.d. tra 6 e 8; esegui il calcolo sommando prima i due addendi negativi e poi quello positivo:

$$.....=\frac{.....-48-.....}{24}=$$

.....

Risolvi le seguenti addizioni (procedi come nell'esercizio precedente):

10. $-3+\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

$+\frac{8}{15}+\left(-\frac{2}{3}\right)+(+1)$

11. $+\frac{7}{10}+\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)$

$-\frac{9}{4}+(+3)+\left(-\frac{4}{9}\right)$

12. $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{9}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

$+\frac{3}{2}+\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)$

13. Risolvi le seguenti addizioni algebriche seguendo le indicazioni.
Ricorda le regole per l'eliminazione di una parentesi:

I) se è preceduta da una segno +, si eliminano il segno + e la parentesi e non si cambiano i segni dei numeri interni alla parentesi;

II) se è preceduta da un segno –, si eliminano il segno – e la parentesi e si cambiano i segni dei numeri interni alla parentesi.

ESEMPIO

a) $+2+(-4+5-8)=+2-4+5-8=$ .....

b) $(+6+11-3)-(+15-3+12)=$

$+6+11-3-15+3-12=$ .....

a) $(+2+3)+(-11+13-6)$

togli le parentesi senza cambiare i segni interni:

$+2+3-11+13-6$

raggruppa e somma tra loro i positivi e i negativi:

$+2+3+13-....-....=+.....-.....$

scrivi il risultato: ..... [+1]

b) $-3-5-(+8-2-3+7)$

togli le parentesi cambiando i segni interni:

$-3-5-8+2$ .....

raggruppa e somma tra loro i positivi e i negativi:

$-3-5-$ ..... = ...

scrivi il risultato:

..... [– 18]

c) $+\frac{1}{4}-\left(+\frac{3}{2}-\frac{3}{5}\right)-1=$

elimina le parentesi cambiando i segni interni:

$+\frac{1}{4}-$ .....

determina il m.c.d. tra 4; 2 e 5 e calcola la somma:

$\frac{+5-30+12-20}{20}=\frac{+17-50}{.....}=-.....$

d) $\left(+\frac{1}{2}-2\right)+\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{3}{4}\right)$

elimina le parentesi applicando correttamente la regola:

.....

determina m.c.d. tra 2; 6; 3 e 4 e calcola la somma:

.....

se hai eseguito i calcoli correttamente ottieni $-\frac{3}{4}$.

Risolvi le seguenti addizioni algebriche di numeri interi.

14. (17 – 29 – 12 – 5) + 7 (+ 3 + 14 – 11) – (7 + 16 – 13)

15. – (– 12 + 20 + 8) – (– 5 + 14 – 9) (– 14 – 10) + (+ 8 – 4) – (– 17 + 8 – 6)

16. (– 21 + 10) + 17 – (– 13 + 24 + 8) (13 – 5 + 16) – (9 – 8 + 4) + 11

17. (11 – 6 + 15) + (18 – 20) – 30 – (23 + 4 – 10) + (– 7 + 14 – 6)

18. 7 – (– 11 + 8) + (4 – 13) – (12 – 24 + 5) + (– 8 – 3 + 5) [+ 2]

Risolvi le seguenti addizioni algebriche di frazioni.

19. $\left(+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$

$-\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\right)$ $\left[+\frac{2}{3};+\frac{1}{2}\right]$

20. $\left(+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)$

$\left(+\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(+3-\frac{1}{3}\right)$ $\left[+\frac{2}{15};-\frac{23}{12}\right]$

21. $\left(+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{7}{12}\right)-\left(+\frac{6}{4}+\frac{7}{3}-\frac{5}{12}\right)+2$ $\left[-\frac{7}{12}\right]$

22. $\left(+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\right)-\left(-3+\frac{11}{4}\right)+\left(+1-\frac{3}{5}-\frac{7}{10}\right)$ $\left[-\frac{11}{20}\right]$

23. $\left(+\frac{1}{2}+3\right)-\left(+2+\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}\right)-\left(+\frac{15}{8}-3\right)$ $\left[+\frac{19}{8}\right]$

24. Completa la regola dei segni per la **moltiplicazione**.

(+) · (+) = ... (.....) · (–) = –

(–) · (.....) = – (.....) · (–) = +

25. Risolvi le seguenti espressioni, contenenti anche moltiplicazioni, seguendo le indicazioni.

a) (+ 4 + 7 – 15) · (– 14 + 27 – 10)

risolvi le addizioni algebriche nelle tonde:

..... · (+ .....)

esegui la moltiplicazione applicando la regola dei segni:

.....

b) $\left(+\frac{7}{10}+\frac{14}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)$

risolvi le addizioni algebriche nelle tonde:

$\left(\frac{.....+.....}{10}\right)\cdot\left(\frac{-.....}{14}\right)$

semplifica in croce, moltiplica poi i numeratori e i denominatori tra di loro e applica la regola dei segni:

.....

Risolvi le seguenti espressioni contenenti anche moltiplicazioni.

26. $(+1+3-6)\cdot(+4-5+6)\cdot(-4+3)$ [+10]

27. $(-7+11-1)\cdot(+2-5)\cdot(+3+4-8+1)$ [0]

28. $-\frac{2}{5}\cdot\left(+\frac{5}{8}\right)-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(+\frac{6}{7}\right)$ $\left(-2+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(+2-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(+\frac{25}{36}\right)-\left(-3+\frac{1}{5}\right)$ $\left[-\frac{3}{28};+\frac{11}{20}\right]$

29. $\left(+2-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(-1+\frac{7}{25}\right)$ $\left[+\frac{3}{2};+\frac{3}{5}\right]$

30. $\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}-\frac{5}{2}\right)$ $\left[-\frac{19}{6}\right]$

31. $\left(+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{5}{3}-3\right)$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

32. $\left(+\frac{3}{4}-\frac{2}{9}-\frac{5}{36}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}+\frac{2}{5}-1\right)-\left(+\frac{1}{10}-\frac{3}{4}\right)$ $\left[+\frac{1}{4}\right]$

33. Completa la seguente tabella scrivendo per ogni numero relativo l'opposto e il reciproco (procedi come nell'esempio).

NUMERO	$+\frac{10}{13}$	$-\frac{5}{7}$	$+\frac{1}{4}$	$+6$	$-\frac{3}{11}$	$+\frac{9}{8}$	$+\frac{4}{25}$	$-$.....	$-\frac{2}{.....}$
OPPOSTO	$-\frac{10}{13}$							$+\frac{2}{5}$	
RECIPROCO O INVERSO	$+\frac{13}{10}$			$+\frac{1}{.....}$					$-\frac{3}{2}$

34. Completa le frasi.

a) L'opposto di un numero relativo si trova cambiando il .....

b) Il reciproco o inverso di un numero relativo frazionario si ottiene scambiando il posto del numeratore e del .....

35. Risolvi le seguenti espressioni, contenenti anche **divisioni**, seguendo le indicazioni.

a) $\left(+\frac{2}{7}-\frac{3}{5}\right):\left(+\frac{11}{21}\right)$

esegui l'addizione algebrica:

$\left(\frac{.....}{35}\right):\left(+\frac{11}{21}\right)$

moltiplica il risultato dell'addizione algebrica per il reciproco di $+\frac{11}{21}$ e scrivi il risultato:

$.....\cdot\left(+\frac{21}{11}\right)=.....$

b) $\left[\left(+\frac{1}{5}-3\right):\left(+\frac{1}{6}-\frac{7}{2}\right)\right]:\left(-\frac{1}{5}-4\right)$

esegui le addizioni algebriche contenute nelle tonde:

$\left[\left(\frac{.....}{5}\right):\left(\frac{.....}{6}\right)\right]:\left(\frac{.....}{5}\right)=\left[\left(.....\right.\right.$

esegui la divisione nelle quadre "capovolgendo" il divisore:

$\left[-\frac{.....}{5}\cdot\left(-\frac{6}{.....}\right)\right]:.....$

esegui l'ultima divisione "capovolgendo" il divisore:

.....

se i tuoi calcoli sono esatti ottieni $-\frac{1}{5}$.

Esegui le seguenti espressioni.

36. $\left[\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{49}{12}\right)\right]:\left[\left(+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)\right]$ $\left[-\frac{5}{4}\right]$

37. $\left(-\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{1}{4}+\frac{7}{8}\right)+\frac{4}{5}$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

38. $\left(+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-2\right):\left(+\frac{15}{2}-4\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

39. $\left[\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-5+\frac{9}{2}\right)\right]:\left(+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)$ $\left[-\frac{15}{4}\right]$

40. $\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(+\frac{5}{6}+1\right)\right]:\left(-\frac{1}{3}-\frac{8}{11}\right)$ $\left[+\frac{3}{7}\right]$

41. $\left[\left(+\frac{7}{3}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(+\frac{3}{13}\right)-\frac{3}{7}\right]:\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{7}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$ $\left[-\frac{3}{20}\right]$

42. $\left[\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right):\left(\frac{3}{2}+1\right)\right]\cdot\left(-1+\frac{13}{18}\right)$ $\left[+\frac{1}{18}\right]$

43. Risolvi le seguenti **potenze**, svolgendo le relative moltiplicazioni (segui le indicazioni):

a) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2=\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=+\frac{.....}{.....}$

b) $\left(+\frac{3}{4}\right)^2=\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)=+\frac{.....}{.....}$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{.....}{.....}$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{.....}{27}$

e) $\left(+\frac{4}{5}\right)^3=\left(+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(+\frac{4}{5}\right)=+\frac{.....}{125}$

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{.....}{.....}$

Risolvi le seguenti potenze.

44. $(-2)^4=$ ..... $(+3)^2=$ ..... $(-5)^3=$ .....

45. $\left(-\frac{5}{11}\right)^0=$ ..... $\left(+\frac{9}{7}\right)^1=$ ..... $\left(-\frac{8}{13}\right)^1=$ .....

46. $\left(+\frac{1}{2}\right)^3=$ ..... $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=$ ..... $\left(-\frac{3}{5}\right)^3=$ .....

47. $\left(-\frac{6}{7}\right)^2=$ ..... $\left(+\frac{5}{9}\right)^2=$ ..... $\left(-\frac{3}{8}\right)^2=$ .....

48. $\left(-\frac{1}{10}\right)^3=$ ..... $\left(-\frac{9}{10}\right)^2=$ ..... $\left(+\frac{3}{10}\right)^4=$ .....

49. Risolvi le seguenti espressioni, contenenti anche potenze, seguendo le indicazioni:

a) $\frac{3}{8}:\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

l'elevamento a potenza ha la precedenza rispetto le altre operazioni; quindi:

$\frac{3}{8}:\left(\frac{.....}{.....}\right)+\left(\frac{.....}{.....}\right)$

esegui la divisione e riscrivi l'addizione:

$\frac{3}{8}\cdot$.....

esegui l'addizione algebrica:

.....

b) $\left[\left(-2+\frac{3}{4}\right):\left(-1+\frac{8}{3}\right)\right]^2$

esegui le addizioni algebriche nelle tonde:

$\left[\left(\frac{\dots\dots}{4}\right):\left(\frac{\dots\dots}{3}\right)\right]^2$

.....

esegui la divisione ed eleva alla seconda il risultato:

..... $\left[+\frac{9}{16}\right]$

c) $\left[-\frac{3}{4}-\left(+1-\frac{5}{3}\right)\right]^2:\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

risolvi le operazioni nelle tonde e nelle quadre ed eleva alla seconda $-\frac{1}{2}$:

.....

.....

eleva alla seconda il risultato delle quadre ed esegui la divisione:

..... $\left[+\frac{1}{36}\right]$

d) $\left[\left(+\frac{1}{6}-\frac{3}{8}-\frac{5}{12}\right):\left(1+\frac{2}{3}\right)\right]^2:\left(-\frac{6}{8}\right)^2$

esegui le addizioni algebriche nelle tonde ed eleva alla seconda $-\frac{6}{8}$:

.....

.....

esegui la divisione nelle quadre ed eleva alla seconda il risultato:

.....

esegui l'ultima divisione:

..... $\left[+\frac{1}{4}\right]$

Risolvi le seguenti espressioni.

50. $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2:\left(2-\frac{7}{3}\right)^3$ $\left[-\frac{3}{4}\right]$

51. $\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{12}-1\right):\left(\frac{5}{2}-1\right)^2$ $\left[-\frac{5}{54}\right]$

52. $\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)^2:\left(-\frac{1}{12}\right)\right]^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ $\left[+\frac{5}{16}\right]$

53. $\left(-2+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(+\frac{1}{2}\right)^3$ $\left[-\frac{7}{8}\right]$

54. $\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left[\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{10}\right)^2\right]$ $\left[+\frac{5}{18}\right]$

55. $\left(+1-\frac{7}{10}\right)^2\cdot\left[+\frac{7}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}\right]^3$ $\left[+\frac{9}{100}\right]$

POTENZIAMENTO

Risolvi le seguenti espressioni.

1. $(0,\overline{3}-0,1\overline{3})-(0,4+1+1,5)-(0,8\overline{3}-0,8\overline{6})$ $\left[-\frac{8}{3}\right]$

2. $(0,8-3)-[-(0,\overline{6}-0,41\overline{6})-(0,\overline{6}-0,75)]$ $\left[-\frac{61}{30}\right]$

3. $0,\overline{3}-\{-2,\overline{6}-[-0,\overline{15}+(1+0,\overline{16})-(-1+0,\overline{01})-1]\}$ [4]

4. $-2,\overline{6}-\left\{-1,\overline{6}+\frac{11}{5}-\left[0,\overline{3}-0,5-\left(2,\overline{3}-\frac{16}{5}\right)\right]\right\}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

5. $\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left\{\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)+\frac{2}{5}\cdot\left[+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\left(-3+\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{77}{180}\right\}$ [0]

6. $\left\{\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{33}\right)-\frac{13}{14}\cdot\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\frac{48}{67}\right\}-\frac{3}{2}$ $\left[-\frac{17}{14}\right]$

7. $\left\{\frac{3}{5}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{27}{22}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(-\frac{14}{5}-\frac{1}{5}\right)\right]\right\}+3$ $\left[+\frac{17}{11}\right]$

8. $\frac{1}{2}-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left\{\left[\left(\frac{3}{6}-\frac{7}{10}-\frac{1}{20}\right)\cdot\left(-\frac{8}{15}\right)+\frac{1}{6}\right]\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}$ $\left[-\frac{4}{5}\right]$

9. $\left[-2,\overline{6}-\left(\frac{2}{3}-1\right)\right]\cdot\left(-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{7}{9}\right)+\left(-2-\frac{4}{5}+2,\overline{3}\right)\cdot\left(+\frac{5}{7}\right)$ $\left[\frac{4}{9}\right]$

10. $-2+\left\{-0,\overline{2}+\left[\left(-0,0\overline{3}+\frac{1}{30}\right)\cdot\left(-5+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}\cdot\left(-\frac{2}{3}+1,\overline{6}\right)$ $\left[-\frac{20}{9}\right]$

11. $\left[-\frac{3}{2}\cdot\left(-2,\overline{6}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{9}+\left(-3+\frac{1}{5}+2,\overline{3}\right)\cdot\frac{5}{7}\right]\cdot\frac{1}{2}$ $\left[\frac{2}{9}\right]$

12. $0,\overline{3}-\left\{0,5+\left[-1+\frac{1}{3}-\left(-0,\overline{63}+\frac{7}{11}\right)+\frac{2}{3}\right]\cdot\left(+\frac{1}{15}\right)\right\}\cdot\frac{1}{5}$ $\left[\frac{7}{30}\right]$

13. $-2,5\cdot(-29,3+24,1):(-2)-[1,2+(5,64-8,36):(-0,4)]:(-2)$ $[-2,5]$

14. $5+3,5-\{[-15,5:(5,9-0,9)+6,4]+2,8:(-6,6+4+1,2)\}$ $[+7,2]$

15. $\{[1,2+4\cdot 0,7-(1,1+5)]-[5,8-(0,9-0,6)]\}:(+0,4)$ $[-19]$

16. $\{2,5+[(1,4-2,7-0,3):(-0,4)+0,2]:(-2,1)\}:(+0,2)$ $[2,5]$

17. $1,1+\left\{+\frac{1}{4}-0,125\cdot[-2\cdot(-0,25)-0,5]+\frac{1}{8}\right\}:(-1,25)-1$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

18. $\left(-1,5+\frac{1}{8}\right):\left[-1,\overline{3}+0,\overline{6}:\left(-0,\overline{3}-\frac{4}{15}-0,4\right)\right]-\frac{3}{16}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

19. $\left[\left(\frac{11}{30}+\frac{9}{20}-1\right):\left(\frac{5}{12}+0,8-1,0\overline{3}\right)\right]:\left[(0,3-1+0,2):\left(\frac{2}{3}-2+0,5\overline{3}\right)\right]$ $\left[-\frac{8}{5}\right]$

20. $\frac{39}{4}:\left\{\frac{4}{3}-\left[1-0,1\overline{6}+(2-1,5):\left(5,5-\frac{1}{2}\right)-0,25\right]:2,7\overline{3}\right\}$ $[9]$

21. $\left\{\left[-3\cdot(-0,5-0,1\overline{3})+\left(0,6-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)\right]\cdot[2,\overline{3}:1,4-0,\overline{7}]\right\}:0,8\overline{6}$ $\left[\frac{16}{9}\right]$

22. $(-0,5-0,\overline{3})\cdot[0,4+(-1+0,5)+0,4]:[0,\overline{3}+(-2)\cdot(-1,\overline{3})]$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

23. $(1,\overline{3}+4,1\overline{6}):\left[-0,1-\left(\frac{13}{4}+1,5-0,4\right)-(0,75+1,2-1)\right]$ $\left[-\frac{55}{54}\right]$

24. $\left\{-\frac{15}{4}\cdot\left(-\frac{4}{25}\right)+\left(\frac{5}{12}-\frac{11}{8}\right)\cdot\left[-\frac{6}{7}:\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{7}{20}-\frac{3}{5}+\frac{4}{9}\right)+\frac{17}{14}\right]\right\}:\left(-\frac{17}{4}\right)$ $\left[-\frac{4}{25}\right]$

25. $\left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{4}\right)^3\right]:\left(-\frac{3}{4}\right)^3+\frac{3}{2}\right\}:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{9}{2}+3\right)\cdot(-3)$ $\left[+\frac{1}{2}\right]$

26. $\left\{\left[\left(0,8-\frac{2}{5}\right)^2:(-0,4)\right]^2+(-0,2)^2\right\}:(-0,52)$ $\left[-\frac{5}{13}\right]$

27. $+\frac{7}{20}+\left[(-0,75)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)\right]^3:(-0,5)^2+[-0,2\cdot(-1,\overline{6})]^2:0,2\overline{6}$ $\left[+\frac{4}{15}\right]$

28. $\left[(-0,1)^2:\left(-\frac{1}{6}\right)^2+(-0,2)^3:(-0,1)^2+(0,\overline{3})^4\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)^2\right]:\left(\frac{19}{4}\right)$ $\left[-\frac{1}{25}\right]$

29. $(-0,8\overline{3})^2:\left\{\left[\left(\frac{1}{15}-0,9\right)^2:\frac{5}{4}-\frac{1}{3}\right]^2:0,\overline{2}-0,\overline{5}\right\}+0,1\overline{6}$ $\left[-\frac{23}{12}\right]$

30. $-\frac{7}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\frac{7}{6}}{\frac{11}{20}:\left(-\frac{22}{25}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{5}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

31. $\frac{\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[-\frac{2}{9}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]+\left(\frac{3}{5}\right)^2:\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right\}:\frac{19}{8}}{-\left(-\frac{1}{3}\right)^2:\left(-\frac{1}{3}\right)^4-\left(-\frac{3}{5}\right)^2\cdot 50+\frac{13}{2}\cdot(-2)^2}$ $\left[-\frac{4}{9}\right]$

32. $\frac{\left(1-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[-1-\left(1-\frac{4}{3}\right)^2\right]+(-3):\left(1-\frac{5}{2}\right)^2}{\left(-3^2+\frac{4}{3}\right):\left[\left(\frac{1}{3}\right)^6:\left(\frac{1}{3}\right)^4-\frac{8}{3}\right]-\left[\left(4-\frac{3}{2}\right)^2-\left(2+\frac{3}{2}\right)^2\right]}$ $\left[-\frac{10}{81}\right]$

33. $\frac{\left[\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{1}{3}\right)\right]^2\cdot\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{1+\frac{1}{11}}}:\frac{\frac{1}{1+\frac{5}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}-\frac{1}{24}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3:\left(\frac{1}{9}+\frac{9}{27}\right)}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

34. $\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}{2-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}-\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{1-\frac{4}{5}}}+\frac{\left(2-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{16}{33}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$ $\left[-\frac{119}{96}\right]$

35. $\frac{\sqrt{+5+[-(-6+1)+(-10+4)+3]-(-11-6+8)}}{\sqrt{-\{-[-(-9+26)+(-4+17)-1]-19\}+11}}$ $\left[\pm\frac{4}{5}\right]$

36. $\sqrt{\left[-\frac{1}{15}:\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{3}\right]+\left[-\left(\frac{7}{12}-\frac{13}{4}:3\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{8}{3}\right]}$ $\left[\pm\frac{3}{2}\right]$

37. $\sqrt{\left[\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{15}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)^5\right]+\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(\frac{2}{47}\right)\right]+\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}\right)^3\cdot\left(-\frac{39}{2}\right)-\frac{9}{4}\right]}$ $[\pm 2]$

38. $\sqrt{\left\{\left[\left(\frac{2}{3}-1\right)^2-\left(\frac{1}{2}-1\right)^2:\frac{3}{2}-\left(-\frac{2}{3}\right)^2:\frac{8}{9}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\right]^2-\frac{3}{4}\right\}^3\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)}$ $\left[\pm\frac{1}{5}\right]$

39. Angelo e Corrado si sfidano a un gioco di precisione che consiste nel centrare una buca con 20 palline ciascuno. Ad ogni lancio si tirano 5 palline e ogni centro vale:
– 2 punti per ciascuna pallina del primo lancio
– 4 punti per le seconde cinque
– 8 punti per le terze cinque
– 16 punti per le ultime cinque.
Ogni errore corrisponde a una penalità di 3 punti.
Osserva la tabella e determina il punteggio finale di ogni giocatore (assegna a ogni centro un valore positivo e a ogni errore un valore negativo).

	1° LANCIO	2° LANCIO	3° LANCIO	4° LANCIO
ANGELO	3 buche	2 buche	4 buche	2 buche
CORRADO	1 buca	4 buche	5 buche	3 buche

40. La tabella riporta le operazioni effettuate sul conto corrente di Caterina nel periodo che va dal 12 al 30 novembre 2009.

Data	Operazione	Importo (in euro)
12 novembre 2009	Versamento	2300
17 novembre 2009	Versamento	850
19 novembre 2009	Prelievo	1500
20 novembre 2009	Prelievo	2120
23 novembre 2009	Versamento	3740,50
30 novembre 2009	Prelievo	1950

a) Scrivi e risolvi l'espressione che indica quanti euro sono sul conto corrente di Caterina dopo il 30 novembre 2009.

b) Sapendo che il saldo di quel conto all'11 novembre 2009 era di 780 euro, calcola:
– il saldo attuale
– il saldo al 21 novembre
– il saldo al 25 novembre.

41. In un laboratorio un oggetto avente una temperatura iniziale di 4° C sotto lo zero viene raffreddato e la sua temperatura scende di 6°C; poi, subisce due riscaldamenti successivi: il primo di 3°C e il secondo di 5°C. A questo punto subisce un ultimo raffreddamento di 9°C. Qual è la temperatura finale dell'oggetto?

Scrivi le espressioni che corrispondono ai seguenti passaggi e risolvile.

42. Alla somma di – 12 con + 7 sottrai la differenza tra – 5 e + 8. [+8]

43. Dalla somma di + 5 con – 19 togli la differenza tra – 12 e + 6; al risultato aggiungi la somma di – 13 con – 4. [–13]

44. Alla differenza tra $-\frac{2}{3}$ e $\frac{11}{5}$ aggiungi la somma di $\frac{1}{10}$ con $-\frac{14}{15}$; al risultato togli – 7. $\left[-\frac{33}{10}\right]$

45. Determina il numero che aggiunto alla differenza tra $-\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{4}$ dà come risultato $-\frac{6}{5}$. $\left[-\frac{11}{20}\right]$

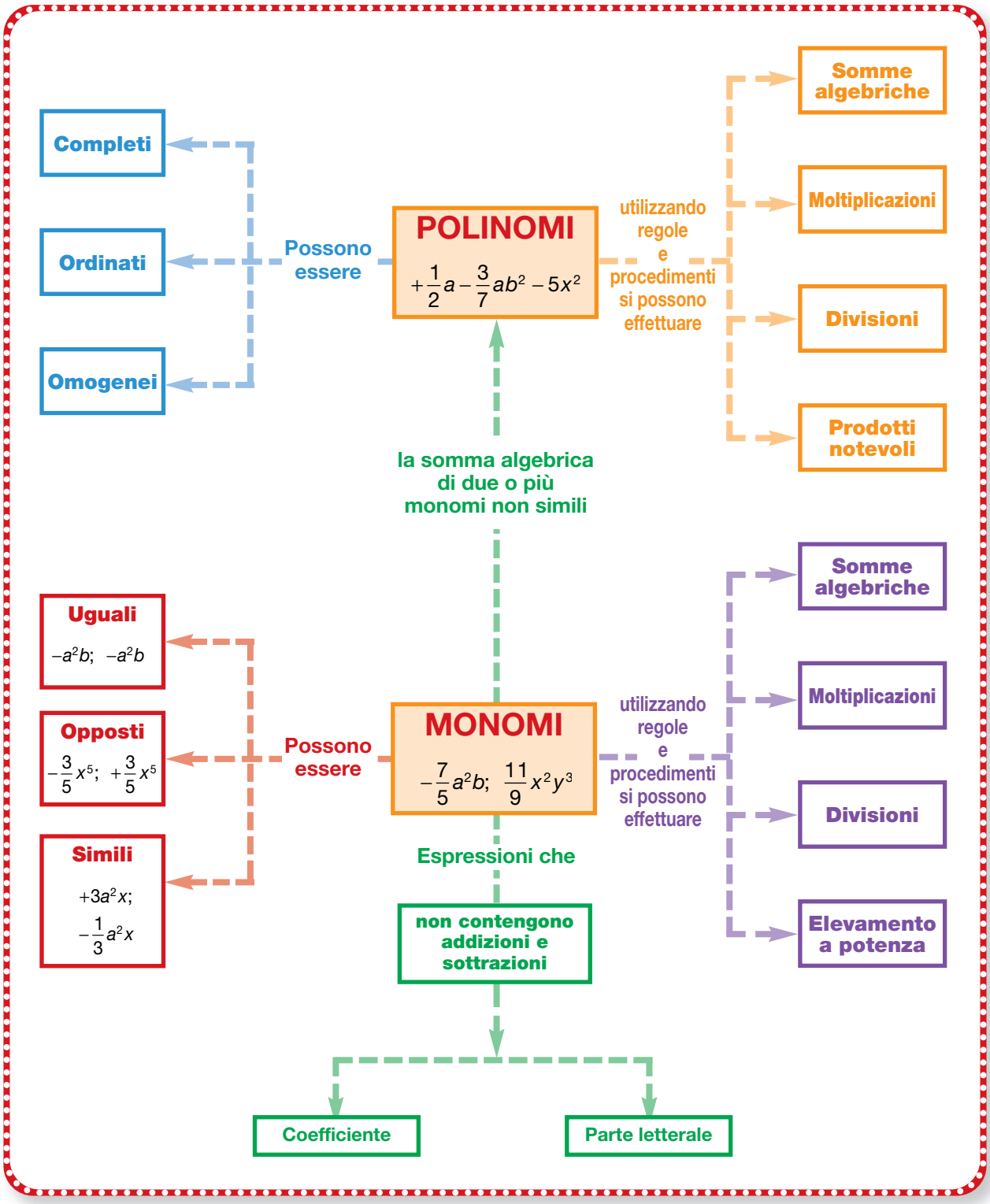
46. Qual è il numero che sottratto alla somma di $-\frac{4}{7}$ e $\frac{11}{14}$ dà come risultato $-\frac{13}{21}$? $\left[+\frac{5}{6}\right]$

47. Quali sono i due numeri che hanno come somma – 7 e come prodotto 12?

48. Quali sono i due numeri che hanno come somma 1 e come prodotto – 56?

49. Quali sono i due numeri che hanno come somma – 17 e come prodotto 30?

ESERCIZI E ATTIVITÀ PER IL RECUPERO E PER IL POTENZIAMENTO



RECUPERO

Prima di effettuare gli esercizi per il recupero
è opportuno che tu riveda la teoria sul libro di testo.

MONOMI

Un monomio è il prodotto di un fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.

ESEMPIO

a) $-\frac{3}{5}ab+\frac{2}{7}ac$ **NON è un monomio**, perché presenta l'addizione algebrica;
b) $+9x^3y$ **è un monomio** in cui $+9$ è il **coefficiente** e x^3y è la **parte letterale**.

1. Tra le seguenti espressioni letterali contrassegna i monomi.

- ☐ $5x^2y^3$
- ☐ $+2a^2-3c^3$
- ☐ xy^2z^3
- ☐ $-\frac{10}{3}a^3b^5$
- ☐ $-12m-3n^3$
- ☐ $-\frac{4}{7}a^5m^3$
- ☐ ab^2-n^4
- ☐ $a^2c^4m^6$

2. Osservando l'esempio completa la tabella relativa ai monomi dell'esercizio 1.

Monomio	Coefficiente	Parte letterale
$5x^2y^3$	$+5$	x^2y^3
xy^2z^3		
$-\frac{10}{3}a^3b^5$		
$-\frac{4}{7}a^5m^3$		
$-a^2c^4m^6$	-1	

In ogni monomio si distingue un grado complessivo (somma degli esponenti delle sue lettere) e un grado rispetto a una lettera (esponente di quella lettera)

ESEMPIO

Nel monomio $5x^2y^3$:
il grado complessivo è $(2+3)=5$
il grado rispetto alla lettera x è 2
il grado rispetto alla lettera y è 3.

3. Procedi come nell'esempio per completare la tabella.

Monomio	Coefficiente	Grado rispetto alle lettere								Grado complessivo
		a	b	c	m	n	x	y	z	
$-\frac{3}{4}a^2c^5z^6$	$-\frac{3}{4}$	2	0	5	0	0	0	0	6	$2+5+6=13$
$0{,}6b^3m^4x$										
$-c^4n^3y^2z^3$										
$\frac{1}{5}x^3y^5z^4$										
$-\frac{4}{11}a^2b^2c^6$										
$\frac{12}{17}m^4n^5y^7$										

Risolvi le seguenti addizioni algebriche tra monomi seguendo le indicazioni.

4. $2xy-\frac{1}{2}x-3xy+\frac{2}{3}x$

si devono mettere in evidenza e contrassegnare allo stesso modo **i monomi simili (cioè con la stessa parte letterale)**:

$\underline{\underline{-2xy}}\ \underline{-\frac{1}{2}x}\ \underline{\underline{-3xy}}\ \underline{+\frac{2}{3}x}$

si sommano i coefficienti dei monomi simili:

$(-2-3)xy+\left(-\frac{1}{2}\ldots\ldots\ldots\right)x$

$-\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{\ldots\ldots\ldots}{6}\right)x$

si scrive il risultato che è formato da due monomi:

.....

5. $\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b^2+\frac{4}{3}b^2-a-\frac{1}{2}b^2$

contrassegna allo stesso modo i monomi simili e sommali:

$\left(\frac{1}{3}-1\right)a+\left(-\frac{2}{3}+\ldots\ldots-\ldots\ldots\right)b^2$

$\left(\frac{\ldots\ldots\ldots}{3}\right)a+\left(\frac{\ldots\ldots\ldots}{6}\right)b^2$

scrivi il risultato composto da due monomi:

..... $\left[-\frac{2}{3}a+\frac{1}{6}b^2\right]$

6. $2c^2+\left(-\frac{1}{3}cx\right)-(-2cx)+\left(+\frac{1}{4}c^2\right)-\left(-\frac{5}{7}y^3\right)$

elimina le parentesi applicando adeguatamente le regole:

$2c^2-\frac{1}{3}cx+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots$

contrassegna e somma i monomi simili:

$\left(\frac{\ldots\ldots}{4}\right)c^2+\left(\frac{\ldots\ldots}{3}\right)cx+\frac{5}{7}y^3$

scrivi il risultato composto da tre monomi:

..... $\left[\frac{9}{4}c^2+\frac{5}{3}cx+\frac{5}{7}y^3\right]$

Risolvi le seguenti addizioni algebriche.

7. $-a^2+2b-7a^2+10a^2-5b+8b$ $[2a^2+5b]$

8. $-x^3+3y^3-8x^2y+5x^3+2x^2y-4y^3$ $[4x^3-6x^2y-y^3]$

9. $4mn-7mp+5mn+8-2mp-3mn-2$ $[6mn-9mp+6]$

10. $+3a+(-2a)-(-5b)-(+8a)+(-8b)+(+3b)$ $[-7a]$

11. $2x-(-4y^2)-(+5x^2)+(-3x)-(-10x^2)+(-7y^2)$ $[5x^2-x-3y^2]$

12. $7ax-\frac{7}{3}a-\frac{3}{4}ax+\frac{5}{6}a-ax+\frac{1}{2}a$ $\left[\frac{21}{4}ax-a\right]$

13. $\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{3}ab+\frac{3}{2}m^2-5m^2+3ab-\frac{7}{2}ab$ $\left[-\frac{17}{6}m^2-\frac{7}{6}ab\right]$

14. $4a+\frac{7}{2}x^2-2-\frac{7}{2}a+5-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x^2$ $[4x^2+3]$

15. $2y^2-(-2bc)+\left(-\frac{1}{2}y^2\right)-\left(+\frac{4}{3}bc\right)-\left(+\frac{3}{5}y^2\right)$ $\left[\frac{9}{10}y^2+\frac{2}{3}bc\right]$

16. $\frac{1}{2}mn-(-4m^2)+\left(-\frac{4}{3}n^2\right)-\left(-\frac{1}{6}mn\right)+\left(-\frac{1}{3}m^2\right)-\left(-\frac{1}{5}n^2\right)$ $\left[\frac{11}{3}m^2+\frac{2}{3}mn-\frac{17}{15}n^2\right]$

17. Ossserva lo svolgimento dei seguenti **prodotti** di monomi e completa la frase.

a) $-5ab^2c^3\cdot(+3a^2bc^2)=(-5)\cdot(+3)\cdot(a)\cdot(a^2)\cdot(b^2)\cdot(b)\cdot(c^3)\cdot(c^2)=-15a^3b^3c^5$

b) $+\frac{2}{3}xy^2\cdot\left(-\frac{9}{10}x^2y\right)\cdot\left(+\frac{25}{36}xy\right)=\frac{\cancel{2}^{1}}{3}\cdot\left(-\frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{10}_{\cancel{5}_{1}}}\right)\cdot\left(+\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{36}_{4}}\right)\cdot(x)\cdot(x^2)\cdot(x)\cdot(y^2)\cdot(y)\cdot(y)=-\frac{5}{12}x^4y^4$

oppure più velocemente:

c) $\frac{3}{7}a^2x^2y\cdot\left(-\frac{28}{9}xy^3\right)\cdot 12ax^2=\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{7}_{1}}\cdot\left(-\frac{\cancel{28}^{4}}{\cancel{9}_{\cancel{3}_{1}}}\right)\cdot\cancel{12}^{4}\cdot(a^{2+1})\cdot(x^{2+1+2})\cdot(y^{1+3})=-16a^3x^5y^4$

Il ..... di due o più monomi è un monomio avente per ..... il prodotto dei coefficienti e come parte letterale il prodotto .....

Completa i seguenti prodotti tra monomi.

18. $(-3ab)\cdot(-7a)\cdot(b) = +21a^{\cdots}b^{\cdots}$

$(-2x^2y)\cdot(-3xy^2)\cdot(-5xy)\cdot(x^2y^2) = -30x^{\cdots}y^{\cdots}$

$\left(-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{20}_{4}}mn\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{27}_{9}}m^2\right)\cdot(-6mn^2)\cdot(-n^3) = +\ldots\ldots\ldots m^4n^{\cdots}$

$(-12a^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}ax^2\right) = -\ldots\ldots\ldots a^{\cdots}x^{\cdots}$

19. $\frac{1}{6}x^2yz^2\cdot\left(-\frac{9}{5}xyz\right) = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad -\frac{5}{7}b^2c\cdot\left(\frac{21}{20}a^2bc^2\right) = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{4}{9}a^2xy\cdot\left(-\frac{27}{28}x^2y\right)\cdot\left(-\frac{35}{18}axy^2\right) = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{5}bm^2\cdot\left(-\frac{15}{22}a^2b^2\right)\cdot\left(\frac{11}{18}abm\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}b^2m^2\right) = \ldots\ldots\ldots$

Esegui le seguenti espressioni seguendo le indicazioni.

20. $(3a-7a)\cdot(-2b+5b)\cdot(-4ab+9ab)$
riduci i termini simili nelle parentesi:
$(-4a)\cdot(+\ldots\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots)$
esegui le moltiplicazioni e scrivi il prodotto:
..... $[-60a^2b^2]$

21. $2a^2\cdot(-6x^2)-3x\cdot(-a^2x)+4a\cdot(-ax^2)+15a^2x^2$
esegui le tre moltiplicazioni e riscrivi l'ultimo monomio:
$-12a^2x^2 + \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots + 15a^2x^2$
riduci i monomi simili e scrivi il risultato:
$(-12+3-4+15)$ ..... $[2a^2x^2]$

22. $(-2a^4b^2x^3+8a^4b^2x^3)+$
$+\frac{3}{2}abx\cdot\left(-\frac{8}{3}a^3bx^2\right)-\frac{4}{3}a^4x^3\cdot\left(+\frac{1}{2}b^2\right)$
riduci i termini simili nella prima parentesi ed esegui le due moltiplicazioni:
$6\ldots\ldots\ldots - 4\ldots\ldots\ldots - \frac{2}{3}\ldots\ldots\ldots$
riduci i termini simili e scrivi il risultato:
$\left(6-4-\frac{2}{3}\right)\ldots\ldots\ldots$
$\left[\frac{4}{3}a^4b^2x^3\right]$

Risolvi le seguenti espressioni ricordando le indicazioni degli esercizi precedenti.

23. $-2c^2-2c\cdot(-2c)-2c\cdot(+3a^2b)-c\cdot(-15c)+2a^2\cdot(+3bc)$ $[17c^2]$

24. $-\frac{1}{3}x^4y\cdot(-xy^3)+(-15x^5y^4+10x^5y^4)-\frac{1}{3}x\cdot(2xy^3)\cdot(-3x^3y)$ $\left[-\frac{8}{3}x^5y^4\right]$

25. $5a^3\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)+2a^2\cdot\left(-\frac{3}{4}a^2b\right)-\frac{1}{3}a^2b\cdot(-2a^2)$ $\left[+\frac{5}{3}a^4b\right]$

26. $\left(2m^2n-\frac{3}{2}m^2n\right)\cdot\left(\frac{1}{4}mn+2mn\right)\cdot\left(\frac{5}{3}mn^2p^3-2mn^2p^3\right)$ $\left[-\frac{3}{8}m^4n^4p^3\right]$

27. $\left(-\frac{5}{2}xy^2+3xy^2\right)\cdot\left(-5x^2y+\frac{7}{2}x^2y\right)+\frac{3}{2}xy\cdot\left(-\frac{4}{9}x^2y^2\right)$ $\left[-\frac{17}{12}x^3y^3\right]$

28. $-\frac{3}{5}ab^3c\cdot(-10ab^2)+\left(-\frac{2}{3}a^2bc\right)\cdot(+9b^4)+(-3a^2b^5c+2a^2b^5c)$ $[-a^2b^5c]$

29. Completa gli esempi e le frasi relativi alle **potenze** di monomi.

a) $(-3a^2b^3)^2 = (-3)^2\cdot(a^2)^2\cdot(b^3)^2 = +9a^{\cdots}b^6$

b) $\left(-\frac{2}{5}x^4y^3\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2\cdot(x^4)^2\cdot(y^3)^2 = +\frac{4}{25}x^{\cdots}y^{\cdots}$

c) $\left(-\frac{1}{2}m^2n\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot(m^2)^3\cdot(n)^3 = -\frac{1}{\ldots}m^{\cdots}n^{\cdots}$

Per elevare a potenza un monomio si eleva a potenza sia il ..... che la parte ..... del monomio dato.

Calcola le seguenti potenze di monomi.

30. $\left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right)^4 = +\frac{1}{16}$..... $\quad (-m^3n^4)^5 = -m^{15}$.....

$\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)^3 = -$..... $\quad \left(\frac{1}{5}x^3y^2\right)^2 =$.....

31. $\left(-\frac{4}{7}a^3y^4\right)^2 = +$..... $\quad \left(-\frac{3}{4}b^3c^4\right)^3 =$.....

$\left(-\frac{1}{2}x^2y^3z^4\right)^3 = -$..... $\quad \left(+\frac{5}{6}a^2b^3\right)^2 =$.....

Segui le indicazioni per risolvere le espressioni con potenze di monomi.

32. $(5x)^2 \cdot (-x)^3 - 2x^3 \cdot (-2x)^2 + 18x \cdot (-x)^4 + 15x^5$

esegui le potenze di monomi:

$25x^2 \cdot (-x^3) - 2x^3 \cdot (+$.....$) + 18x \cdot ($.....$) + 15x^5$

esegui le moltiplicazioni:

$-25x^5 -$ .....

riduci i termini simili e scrivi il risultato:

$(-25 -$ .....$)$..... [0]

33. $\left(-\frac{1}{2}xy^2z\right)^2 + \frac{5}{8}y^2 \cdot (-xyz)^2 - \left(2xy^2z - \frac{3}{4}xy^2z\right)^2$

risolvi le prime due potenze e riduci i termini simili nell'ultima parentesi:

$+\frac{1}{4}$.....$+\frac{5}{8}y^2 \cdot$.....$-($.....$)^2$

esegui la moltiplicazione e risolvi la potenza:

.....

riduci i termini simili e scrivi il risultato:

..... $\left[-\frac{11}{16}x^2y^4z^2\right]$

34. $(-3a^{15}b^5 + 6a^{15}b^5) + \left(-\frac{9}{2}a^3b\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}a^6b^2\right)^2 + (-a^3b)^5$

riduci i termini simili nella prima parentesi ed esegui le potenze:

.....

esegui la moltiplicazione:

.....

riduci i termini simili e scrivi il risultato:

..... [0]

Utilizzando le indicazioni degli esercizi precedenti, risolvi le seguenti espressioni.

35. $3b \cdot (-b + 5b)^2 - b \cdot (-7b)^2 + (-2b)^4 + b \cdot (-2b)^3 + (-2b^2)^2$ $[12b^4 - b^3]$

36. $(3mn - 2mn + 8mn) \cdot (+4a^2 - 3a^2) + \left(\frac{3}{5}mn\right) \cdot (-8a^2 + 3a^2)$ $[-6a^2mn]$

37. $(xy^3)^2 \cdot (-xy) - (-xy^2)^3 \cdot \frac{1}{3}y + \left(-\frac{3}{5}x^3y + \frac{1}{3}x^3y\right) \cdot (-y^2)^3$ $\left[-\frac{2}{5}x^3y^7\right]$

38. $\left(\frac{3}{2}a^2b\right)^2 \cdot (-a)^2 - \frac{1}{2} \cdot (a^3)^2 \cdot (-b)^2 - 3a^2b^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right)^4 - a^6b^2$ $\left[\frac{9}{16}a^6b^2\right]$

39. $(2m^2n)^4 - (5m^2n)^4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left[(-m^2n)^2\right]^2 + 10m^4n \cdot \left(-\frac{1}{10}m^4n^3\right)$ $[-9m^8n^4]$

40. $+\frac{5}{9}a\cdot\left(-2ab+\frac{1}{2}ab\right)^2+(-a)^2\cdot ab^2-\frac{2}{3}a\cdot(-ab)^2+3a\cdot(-ab)^2$ $\left[\frac{55}{12}a^3b^2\right]$

41. Completa gli esempi e la frase relativi a **divisioni** fra monomi.

a) $-24a^4b^3c^5:8a^2bc^3=(-24):(8)\cdot(a^4):(a^2)\cdot(b^3):(b)\cdot(c^5):(c^3)=-3a^2b^2$.....

b) $\frac{5}{12}x^4y^2:\left(-\frac{25}{9}x^2y\right)=\frac{5}{12}:\left(-\frac{25}{9}\right)\cdot(x^4):(.....)\cdot(y^2):(y)=\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{12}_{4}}\cdot\left(-\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{25}_{5}}\right)\cdot x^2\cdot y=-$.....

oppure più velocemente:

c) $\frac{2}{3}x^3y^2z^6:\left(-\frac{1}{9}xyz^4\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{9}{1}\right)\cdot x^{3-1}\cdot y^{.....}\cdot z^{.....}=-$.....

Il quoziente di due ..... è un monomio avente come ..... il .....
..... dei coefficienti e come parte letterale il .....

Esegui le seguenti divisioni tra monomi.

42. $15a^4b^3:(-5a^2b^2)=-3$..... $-7x^4y^8:(3x^2y^5)=-\frac{7}{3}$.....

43. $-20x^7y^5z^6:(-5x^4y^3z^4)=$..... $-36a^8b^5:(+4a^6b^3)=$.....

44. $-\frac{2}{3}x^3y^2c^4:\left(\frac{4}{9}x^2yc^2\right)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}$..... $-\frac{15}{18}a^{10}b^{12}c^8:\left(-\frac{3}{7}a^7b^{10}c^5\right)=$.....

45. $\left(-\frac{8}{3}x^5y^6\right):\left(-\frac{2}{6}x^3y^3\right)=$..... $\left(-\frac{15}{7}a^3b^2c^4\right):\left(+\frac{3}{28}a^2c^2\right)=$.....

Segui le indicazioni per risolvere le seguenti espressioni con le potenze.

46. $[-27a^3b^5:(-3a^2b^3)-(16a^4b^3):(-2a^3b)]-5ab^2$

risolvi le divisioni nelle quadre:

$[+9$ ..... $-(-8$.....$)]-5ab^2$

togli le parentesi tonde e quadre, riduci i termini simili e scrivi il risultato:

..... $[12ab^2]$

47. $\left(2x^4y^3-\frac{2}{5}x^4y^3-\frac{3}{4}x^4y^3\right):(-30x^2y^2+8x^2y^2+5x^2y^2)$

riduci i termini simili entro le parentesi tonde:

$\left(\frac{40-.....}{20}x^4y^3\right):[(.....)x^2y^2]$

esegui le addizioni algebriche poi la divisione e scrivi il risultato:

..... $\left[-\frac{1}{20}x^2y\right]$

48. $[(-ab^3)\cdot(-5a^3b):(-ab)^2]^2:(-5ab^2)^2+a^2-(-2a)^2$

risolvi le potenze e la moltiplicazione:

$[+$ ..... $:(+$ .....$)]^2:(+$ .....$)+a^2-(+$ .....$)$

esegui la divisione entro le quadre ed elimina le ultime tonde:

$[+$ .....$]^2:$ ..... $+a^2-$ .....

eleva alla seconda e poi esegui la divisione:

.....

riduci i termini simili:

..... $[-2a^2]$

49. $\left[\frac{3}{5}mn\cdot\left(-\frac{1}{3}m^2\right)^2\cdot(-5n^2)^2\right]^2+2\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot(-mn)^5\right]^2$

risolvi le potenze:

$\left[\frac{3}{5}mn\cdot(+\ldots\ldots\ldots\ldots)\cdot(+\ldots\ldots\ldots\ldots)\right]^2+2\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot(-\ldots\ldots\ldots\ldots)\right]^2$

esegui le moltiplicazioni entro le quadre:

$[+\ \ldots\ldots\ldots\ldots]^2+2\cdot[+\ \ldots\ldots\ldots\ldots]^2$

risolvi le potenze e l'ultima moltiplicazione:

.....

riduci i termini simili e scrivi il risultato:

..... $[3m^{10}n^{10}]$

Ricordando i suggerimenti degli esercizi precedenti, risolvi le seguenti espressioni.

50. $[2x^3\cdot(-xy)^2]^2:(-3x^2y^2)^2$ $\left[\frac{4}{9}x^6\right]$

51. $[(-2b^2):b]^2:(-4b)+(-3b^2)^2:(-2b^3)+5b$ $\left[-\frac{1}{2}b\right]$

52. $[(12a^2b^3):(-2ab^2)]^2:(-3ab)-[a\cdot(2ab)^2]:(a^2b)$ $[-16ab]$

53. $[18x^5y^2:(3xy)^2]^2+9x^7y:(3xy)+x^8y^2:(xy)^2$ $[6x^6]$

54. $\frac{4}{5}m^4n^2:(-2m^2)^2-\frac{3}{7}m^6n^5:(-m^2n)^3+\frac{4}{7}n^2$ $\left[\frac{6}{5}n^2\right]$

55. $[(-3ax)^2:4a]^2-\left(\frac{5}{4}a^3x^2\right)^2:\left(-\frac{5}{7}a^2\right)^2-\left(\frac{1}{2}ax^2\right)^2$ $\left[\frac{7}{4}a^2x^4\right]$

56. $\left(-\frac{1}{2}y^2z\right)^3:\frac{1}{4}yz^2+\left(-\frac{1}{3}y^3z\right)^2:\frac{1}{6}yz-yz\cdot(-y^2)^2$ $\left[-\frac{5}{6}y^5z\right]$

57. $2a^4:\left(-\frac{2}{3}a\right)^3+\frac{4}{3}a^3c^2:\left(-\frac{1}{3}ac\right)^2+(-2ab)^2:(ab^2)$ $\left[\frac{37}{4}a\right]$

58. $\left[\left(\frac{2}{3}by^2\right)^2:\frac{4}{3}b^2\right]^3-\left[\left(\frac{1}{2}b^3y^2\right)^2:\left(-\frac{1}{2}b^3\right)^2\right]^3$ $\left[-\frac{26}{27}y^{12}\right]$

59. $\left\{\left[2xy^2\cdot\left(-\frac{3}{4}x\right)^2\right]:[-3x\cdot(-3x^2y)]\right\}^2:\left(-\frac{9}{8}y^2\right)+\frac{5}{36}y^2$ $\left[-\frac{1}{8}y^2\right]$

60. $\left[3x^2+5a\cdot\left(-\frac{1}{5}b^2\right)+ab\cdot\left(-\frac{1}{4}b\right)+\frac{7}{4}ab^2-\frac{1}{2}ab^2\right]^2$ $[9x^4]$

POLINOMI

Un polinomio è la somma di due o più monomi non simili.

ESEMPIO

a) $5a^3b^2+3ab^2-7ab^3$ trinomio

b) $\frac{3}{4}x^2y-\frac{1}{2}xy^2$ binomio

c) $6mn^2+8m^2n^4-5m^3-3n^2$ quadrinomio

61. Completa la seguente tabella relativa al grado dei polinomi.

Polinomio	Grado complessivo	Parte letterale					
		a	b	x	y	m	n
$5a^3b^2 + 3ab^2 - 7ab^3$	$3 + 2 = 5$	3	3	0	0	0	0
$\frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}x^2y^2$							
$6mn^2 + 8m^2n^4 - 5m^3 - 3n^2$							
$4x^4y - 6x^3y^2 + 2xy^3$							
$\frac{3}{5}b^3c^2 - \frac{1}{4}x^4y + \frac{2}{7}b^2y^4$							

62. Completa gli esempi e le frasi relative alle addizioni algebriche di polinomi.

a) $(-6ab + 5a^2 - b^2) - (+2a^2 + 4ab - 3b^2) = -6ab + 5a^2 - b^2 - 2a^2 - 4ab + 3b^2 =$

.....

b) $(-2m^2 + 3n^3) + (-5m^2 - 4n^3 + 6mn) - (-8n^3 + 4mn) =$

$-2m^2 + 3n^3 - 5m^2 - 4n^3 + 6mn + 8n^3 -$ ..... $=$

$-7m^2 + 7n^3 +$ .....

Per addizionare o sottrarre due o più ..... si scrivono uno di seguito .....

riducendo gli eventuali termini ..... Per eliminare le parentesi si procede in questo modo:

- se la ..... è preceduta da un **segno** $+$, i termini in essa contenuti **non** .....;
- se la parentesi è ..... da **un segno** $-$, i termini in essa contenuti **cambiano** .....

Segui le indicazioni per risolvere le seguenti addizioni tra polinomi.

63. $(3b^2 - 5x + 4) + (2b^2 - 3x) - (4b^2 + 8x + 7)$

elimina le parentesi cambiando i segni dei monomi contenuti nell'ultima parentesi:

.....

evidenzia i monomi simili e riducili:

$(3 + 2 - 4)b^2 + (-5 - 3 - 8)$..... $+ 4 - 7$

scrivi e controlla il risultato:

..... $[b^2 - 16x - 3]$

64. $(3x^2 + y^2) - (4x + y^2) - (2x^2 - x)$

elimina le parentesi:

.....

evidenzia i monomi simili e riducili:

.....

scrivi il risultato:

..... $[x^2 - 3x]$

65. $\left(\frac{3}{5}a^2 + \frac{3}{4}b - a\right) - \left(\frac{3}{4}b + a^2\right) - \frac{2}{3}a$

elimina le parentesi:

$\frac{3}{5}a^2 + \frac{3}{4}b - a - \frac{3}{4}b$.....

evidenzia e riduci i monomi simili:

.....

scrivi e controlla il risultato:

..... $\left[-\frac{2}{5}a^2 - \frac{5}{3}a\right]$

Utilizzando le regole e i suggerimenti degli esercizi precedenti, esegui le seguenti somme algebriche di polinomi.

66. $(2x^3 - y) - 2y^2 - (x^3 - 2y^2 + y)$ $[x^3 - 2y]$

67. $b^2 - (-4b + 2c) + (4b^2 + c) - (4b - c)$ $[5b^2]$

68. $(6x^2 + y + 1) - (x^2 - y - 3) + (x^2 - 2y) + 2y$ $[6x^2 + 2y + 4]$

69. $\left(\frac{2}{5}a^2 + 2x\right) + \frac{1}{3}x^2 - \left(-\frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{5}a^2 + x\right)$ $\left[a^2 + \frac{5}{3}x^2 + x\right]$

70. $3x^2 - \left(\frac{1}{3}x^2y - x^4\right) + \left(x^2 - \frac{1}{4}x^4\right) - \left(\frac{1}{6}x^2y + x^4\right)$ $\left[-\frac{1}{4}x^4 + 4x^2 - \frac{1}{2}x^2y\right]$

71. Completa gli esempi e le frasi relative al **prodotto di un monomio con un polinomio**:

a) $-3x^2 \cdot (-5ax + 2xy - 4ay) = +15ax^3 - 6x^3y + 12$ .....

b) $\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{5}{8}ab\right) \cdot (-4ab) = -3a^3b + 2ab^3 + \ldots\ldots\ldots$

Il prodotto di un ..... per un polinomio si ottiene ..... il monomio per ciascun termine del .....

Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio.

72. $-xy \cdot (3x^2 + 2xy - y^2)$ $[-3x^3y - 2x^2y^2 + xy^3]$

73. $(2b - 3c + 4d) \cdot (-2c)$ $[-4bc + 6c^2 - 8cd]$

74. $-2y \cdot (2x - 4y + 2xy)$ $[-4xy + 8y^2 - 4xy^2]$

75. $\frac{3}{4}a^2 \cdot \left(b^2 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{6}ab^2\right)$ $\left[\frac{3}{4}a^2b^2 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{8}a^3b^2\right]$

76. $\left(2x^2 - \frac{2}{3}xy^2 + 4y^3\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}y^2\right)$ $\left[-x^2y^2 + \frac{1}{3}xy^4 - 2y^5\right]$

Risolvi le seguenti espressioni seguendo le indicazioni.

77. $3x \cdot (x + y) - x \cdot (2y + 7x) - (-4x^2 + 2y)$

esegui le due moltiplicazioni ed elimina le ultime parentesi:

.....

evidenzia e riduci i termini simili:

..... $[-2y + xy]$

78. $-\frac{1}{2} \cdot (a^2 - b^2) - ab + \frac{3}{4}a \cdot \left(b + \frac{2}{3}a\right) + \frac{1}{2}b^2$

esegui le moltiplicazioni:

.....

evidenzia e riduci i termini simili dopo aver eliminato i monomi opposti:

..... $\left[b^2 - \frac{1}{4}ab\right]$

Utilizzando i suggerimenti degli esercizi precedenti, risolvi le seguenti espressioni.

79. $-2c^2 \cdot (6b^2 + 3bc + c^2) + 3bc \cdot (b^2 + 4bc + 2c^2)$ $[3b^3c - 2c^4]$

80. $2a \cdot (a^3 - 2a^2 + a) - (2a^4 - a^3) + a \cdot (3a^2 + a)$ $[3a^2]$

81. $2x \cdot (x + y + xy) \cdot (-3y) - (-6x^2y - 6xy^2)$ $[-6x^2y^2]$

82. $-\frac{3}{2}x \cdot \left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{3}xy\right) - \frac{1}{2}y \cdot \left(2x^2 - \frac{2}{3}xy + 4x\right)$ $\left[-\frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{2}x^2y - 2xy\right]$

83. $-\frac{1}{3}a \cdot (ab^2 - 3ab^3 - b^3) - \frac{1}{2}ab^2 \cdot \left(-a + 2ab - \frac{1}{2}b\right)$ $\left[\frac{1}{6}a^2b^2 + \frac{7}{12}ab^3\right]$

84. Completa gli esempi e le frasi relative a **moltiplicazioni di polinomi**:

a) $(-2x + 2y) \cdot (y - 3x) = -2xy + 6x^2 + 2y^2 - 6xy = 6x^2 + 2y^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\left(-\frac{1}{3}b + ab\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}a - 6a^2\right) = +\frac{1}{9}ab + 2a^2b - \frac{1}{3}\ldots\ldots\ldots - 6a^3b = \frac{1}{9}ab - 6a^3b\ldots\ldots\ldots$

Il prodotto di due ..... si ottiene ..... ciascun termine del primo ..... per tutti i ..... del secondo.

Esegui i seguenti prodotti di polinomi.

85. $(a - 2b) \cdot (a^2 - b)$ $[a^3 - ab - 2a^2b + 2b^2]$

86. $(5a - 2b + 4c) \cdot (2a - b)$ $[10a^2 - 9ab + 8ac - 4bc + 2b^2]$

87. $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 3x + 4)$ $[x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x - 4]$

88. $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}y^2 + y\right)$ $\left[-\frac{1}{6}xy^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{9}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^2y\right]$

Seguendo le indicazioni, risolvi le seguenti espressioni.

89. $(3x - 1) \cdot (2x + 3) + x \cdot (4 - 2x)$

esegui le moltiplicazioni:

.....

evidenzia e riduci i monomi simili:

..... $[4x^2 - 11x - 3]$

90. $-2a \cdot \left(a + \frac{1}{4}b\right) + (2a + b) \cdot (3a - b) - (4a^2 - b^2)$

esegui le moltiplicazioni:

.....

elimina i monomi opposti e riduci quelli simili:

..... $\left[\frac{1}{2}ab\right]$

91. $(2x+1)\cdot(1-3x)\cdot(x-2)$

esegui il primo prodotto e riduci i termini simili nelle prime parentesi:

(.....) · (x – 2) = ...

esegui il secondo prodotto:

.....

riduci i termini simili:

..... $[-6x^3+11x^2+3x-2]$

92. $(3a-1)\cdot(2a+2)\cdot\left(a^2-\frac{1}{2}a+1\right)$

esegui il primo prodotto:

$(6a^2+6a-2a-2)\cdot$ (.....)

riduci i termini simili:

$(6a^2+4a-2)\cdot$ (.....)

esegui il secondo prodotto e riduci i termini simili:

.....

..... $[6a^4+a^3+2a^2+5a-2]$

Risolvi le seguenti espressioni.

93. $(2a-5b)\cdot(3a-b)-3b\cdot(-2a+4b)$ $[6a^2-11ab-7b^2]$

94. $3x\cdot(x-2y)+(x-y)\cdot(2x-y)-(-2y)^2$ $[5x^2-9xy-3y^2]$

95. $(2a-b)\cdot(a+3b)\cdot(3a^2-2b^2)-5\cdot(3a^2b-2ab^3)$ $[6a^4-13a^2b^2+6b^4]$

96. $\left(x^3-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)-x^3\cdot\left(x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x\right)$ $\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{24}\right]$

97. $\left(\frac{2}{3}c^2-\frac{1}{2}c+3\right)\cdot\left(\frac{5}{2}c-\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{3}c\cdot(-c)^2$ $\left[-\frac{61}{36}c^2+\frac{47}{6}c-2\right]$

Osserva gli esempi e completa i seguenti quozienti tra un polinomio e un monomio.

ESEMPIO

a) $(10a^4b^2+6a^3b^3-8a^2b^4):(-2a^2b)=$

$-5a^{4-2}b^{2-1}-3a^{3-2}b^{3-1}+4a^{2-2}b^{4-1}=-5^2b-3ab^2+4b^3$

b) $\left(\frac{3}{2}a^2b^3-\frac{1}{8}ab^4\right):\left(-\frac{1}{2}ab\right)=\left(\frac{3}{\cancel{2}_1}\right)\cdot\left(-\cancel{2}^1\right)a^{2-1}b^{3-1}+\left(-\frac{1}{\cancel{8}_4}\right)\cdot\left(-\cancel{2}^1\right)a^{1-1}b^{4-1}=$

$-3a^{2-1}b^{3-1}+\frac{1}{4}a^{1-1}b^{4-1}=-3ab^2+\frac{1}{4}b^3$

98. $(5m^3n^2-2m^2n^3):(2mn^2)=\frac{5}{2}m^{\cdots\cdots}-\ldots\ldots\ldots$

$(4c^4-8c^3+6c^2):(-2c^2)=-2\ldots\ldots+4\ldots\ldots-3$

99. $\left(-\frac{3}{5}y^6+\frac{2}{15}y^5-\frac{1}{5}y^3\right):\left(-\frac{2}{5}y^2\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)y^{6-2}+\left(+\frac{2}{15}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)y^{5-2}+\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)y^{3-2}=$

.....

$\left(-\frac{1}{3}x^3y^4-\frac{1}{2}x^4y^3+\frac{1}{5}x^5y^2\right):\left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right)=$ .....

100. $(8b^2c^3 - 4bc^2 + 5b^3c):(-2bc)$
$(20x^3y^4 - 12x^2y^5 + 16x^2y^3 - 12x^2y^2):(-4x^2y)$

101. $\left(\frac{1}{6}m^2n - \frac{1}{2}m^2n^2 + \frac{1}{4}mn^3\right):\left(-\frac{1}{2}mn\right)$
$\left(-\frac{3}{5}x^4y^3z^2 + \frac{1}{10}xy^2z^3 + \frac{2}{5}x^2y^3z\right):\left(-\frac{2}{5}xy^2z\right)$

Risolvi le seguenti espressioni seguendo le indicazioni.

102. $(15a^3b^2 - 20a^2b^3) : (5ab^2) - a \cdot (2a - 2b)$
risolvi la divisione e la moltiplicazione:
$3a^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - 2a^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$
evidenzia e riduci i termini simili:
..... $[a^2 - 2ab]$

103. $12 \cdot (-xy^2 + x^3):(-6x) + (x - y) \cdot (x + 2y)$
risolvi le moltiplicazioni:
$(-12xy^2 + 12x^3)$ .....
risolvi la divisione:
.....
evidenzia e riduci i termini simili:
..... $[-x^2 + xy]$

104. $[2a \cdot (3a + b) + 5b \cdot (a - b) + (2a - b) \cdot (b - 3a)] : (-6b)$
risolvi le moltiplicazioni:
$[6a^2 + 2ab +$ .....
elimina i termini opposti e riduci quelli simili:
.....
esegui la divisione:
..... $[-2a + b]$

Risolvi le seguenti espressioni.

105. $[3a \cdot (3a - 4b) - 5a \cdot (5a - 4b)] : (-4a)$ $[4a - 2b]$

106. $[9x^2 - 8y \cdot (+3x - 4y^2) - 3x \cdot (3x - 8y)] : (-16y^2)$ $[-2y]$

107. $[5c \cdot (b - c) + (2b - c) \cdot (c - 3b) + 2b \cdot (3b + c)] : (-6c)$ $[-2b + c]$

108. $[(5m + n) \cdot (2m - n) - (5m - n) \cdot (2m + n)] : (-3m)$ $[+2n]$

PRODOTTO DELLA SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

Osserva gli esempi, completa poi la frase e i prodotti notevoli.

ESEMPIO

a) $(3a + 2b) \cdot (3a - 2b) = 9a^2 - 6\cancel{ab} + 6\cancel{ab} - 4b^2 = 9a^2 - 4b^2$

b) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}y^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}y^3\right) = \frac{1}{4}x^4 - \cancel{\frac{3}{8}x^2y^3} + \cancel{\frac{3}{8}x^2y^3} - \frac{9}{16}y^6 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{16}y^6$

quindi: $(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$

Il prodotto della somma di due ..... per la loro differenza è uguale al ..... del primo ..... meno il quadrato del .....

109. $(3x + 5y^2) \cdot (3x - 5y^2) = 9x^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(4ab^2 + 3a^2b) \cdot (4ab^2 - 3a^2b) = \ldots\ldots\ldots\ldots - 9a^4b^2$

110. $(5m^2n^3 - 6mn^2) \cdot (5m^2n^3 + 6mn^2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(4axy^2 + 7x^2y) \cdot (4axy^2 - 7x^2y) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

111. $\left(\frac{3}{2}x^2y - \frac{1}{5}xy^3\right) \cdot \left(\frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{5}xy^3\right) = \ldots\ldots\ldots x^4y^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\frac{1}{6}az^3 - \frac{3}{8}a^2z^2\right) \cdot \left(\frac{1}{6}az^3 + \frac{3}{8}a^2z^2\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Seguendo le indicazioni, risolvi le seguenti espressioni.

112. $(2x^2 + 3y) \cdot (2x^2 - 3y) \cdot (4x^4 + 9y^2)$

risolvi il primo prodotto notevole e riscrivi l'ultimo binomio:

$(4x^4 - 9y^2) \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

risolvi il secondo prodotto notevole:

$\ldots\ldots\ldots\ldots$ $[16x^8 - 81y^4]$

113. $(3b - 2c) \cdot (3b + 2c) - (b + 3c) \cdot (b - 3c) - 2 \cdot (2b)^2$

esegui i due prodotti notevoli e la potenza:

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

elimina il segno meno e esegui la moltiplicazione:

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

riduci i termini simili:

$\ldots\ldots\ldots\ldots$ $[+ 5c^2]$

114. $(6a^4 + 24a^2b^2 - 12a^2):(- 2a^2) - 2 \cdot (a + 2b) \cdot (a - 2b)$

esegui la divisione e il prodotto notevole:

$- 3a^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

esegui la moltiplicazione:

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

riduci i termini simili:

$\ldots\ldots\ldots\ldots$ $[- 5a^2 - 4b^2 + 6]$

Risolvi le seguenti espressioni.

115. $(3m + 2n^2) \cdot (3m - 2n^2) \cdot (9m^2 + 4n^4)$ $[81m^4 - 16n^8]$

116. $(a^2 + 3) \cdot (a^2 - 3) + (2a^2 + 1) \cdot (2a^2 - 1) - (5 + a^2) \cdot (5 - a^2)$ $[6a^4 - 35]$

117. $2 \cdot (y^2 + 3y) \cdot (y^2 - 3y) + \frac{2}{5} \cdot (y + 5y^2) \cdot (y - 5y^2) + \frac{88}{5}y^2$ $[- 8y^4]$

118. $(10a^4 + 8a^3 + 4a^2) : (- 2a^2) + 3 \cdot (a - 1) \cdot (a + 1) + 2 \cdot (a + 2)$ $[- 2a^2 - 2a - 1]$

119. $(2x^3 + 5xy - 4xy^2) : (- 2x) + \frac{1}{2}y \cdot (5x - 2y) + (x + 2y) \cdot (x - 2y)$ $[- 3y^2]$

QUADRATO DI UN BINOMIO

Osserva gli esempi e completa le frasi.

ESEMPIO

a) $(3x+2y)^2=(3x)^2+(2y)^2+2\cdot(3x)\cdot(2y)=9x^2+4y^2+12xy$

b) $\left(\frac{1}{2}a^2-3b^3\right)^2=\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2+(-3b^3)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}a^2\right)\cdot(-3b^3)=\frac{1}{4}a^4+9b^6-3a^2b^3$

Il quadrato di un ..... è il trinomio costituito dal ..... del primo termine, dal..... prodotto del primo per il ..... termine e dal quadrato del .....
Il segno dei quadrati del primo e del ..... termine è sempre ....., il segno del ..... prodotto è positivo se i due ..... sono concordi, mentre è negativo se i due termini sono .....; quindi $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$; $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

Completa e risolvi i seguenti quadrati di binomi.

120. $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2=4x^2+$ .....
$(3a-5b)^2=(3a)^2+2\cdot(3a)\cdot(-5b)+$ ..... = ...

121. $(x+4y^2)^2=x^2+$ .....
$(2m^2-3n)^2=4m^4-$ .....

122. $\left(\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{3}y^2\right)^2=\frac{9}{25}x^4+$ .....
$\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{4}b^2\right)^2=\frac{1}{9}a^6$ .....

123. $\left(\frac{2}{3}a^2x+\frac{1}{5}by^2\right)^2=\frac{4}{9}a^4x^2$ .....
$\left(\frac{2}{7}x^2y^3-\frac{1}{6}x^3y^2\right)^2=$ .....

Risolvi le seguenti espressioni utilizzando le indicazioni.

124. $(a^2-1)\cdot(a^2+1)-(a^2-2)^2-3\cdot(a^2-1)$
risolvi il prodotto notevole, il quadrato del binomio e la moltiplicazione:
a^4- ..... $-$ (.....
elimina il segno meno davanti la parentesi tonda e riduci i termini simili:
..... $[a^2-2]$

125. $2b-(b-2)^2+(b-1)\cdot(b-3)$
risolvi il quadrato e la moltiplicazione (attenzione: NON è un prodotto notevole):
$2b-$ (.....
elimina il segno meno e riduci i termini simili:
..... $[2b-1]$

126. $\frac{1}{2}a^2\cdot(a^5+2a)^2-2a^2\cdot(-a^{10}+3a^6)-\frac{5}{2}\cdot(a^6-a^2)^2$
risolvi i quadrati e la seconda moltiplicazione:
$\frac{1}{2}a^2\cdot(a^{10}+4a^2+4a^6)+2$.....

esegui le due moltiplicazioni:

.....

riduci i termini simili:

..... $\left[a^8 - \frac{1}{2}a^4\right]$

127. $[(a-2b)^2 - (a+2b)^2 - a \cdot (2a-4b)] : (-2a)$

risolvi i quadrati e la moltiplicazione:

$[a^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots - (a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$

elimina il segno meno ed elimina i termini opposti:

.....

esegui la divisione:

..... $[a+2b]$

Risolvi le seguenti espressioni.

128. $[a^2 \cdot (a^4 + 3a^2 + 3) + 1 - (a^3+1)^2 + 5a^3] : (3a^2) - a^2$ $[a+1]$

129. $2x \cdot (2x-3y)^2 - 3y \cdot (x+2y)^2 - 4 \cdot (2x^3 - 3y^3) + 27x^2y$ $[6xy^2]$

130. $4n \cdot (3m-5n) - 2 \cdot (m+2n) \cdot (m-2n) + 3 \cdot (m-2n)^2$ $[m^2]$

131. $(2a+b) \cdot (2a-b) \cdot (4a^2+b^2) \cdot (16a^4+b^4)$ $[256a^8 - b^8]$

132. $\left[\left(1+\frac{1}{3}x\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{3}x\right)^2 - \left(1+\frac{1}{81}x^4\right)\right] : \left(-\frac{4}{3}x\right)$ $\left[+\frac{1}{6}x\right]$

133. $[(xy-2y) \cdot (xy+2y) \cdot (x^2y^2+4y^2) + 11y^4] : (5y^4)$ $\left[\frac{1}{5}x^4 - 1\right]$

POTENZIAMENTO

Valori delle lettere che fanno perdere significato ad un'espressione letterale.

Alle lettere che figurano nelle espressioni letterali non si possono assegnare valori qualsiasi. Precisamente, non si possono assegnare quei valori numerici che sostituiti all'espressione la rendono priva di significato.

Nell'espressione letterale $\sqrt{x^2-9}$ alla lettera x si deve assegnare un numero relativo il cui valore assoluto è maggiore o uguale a 3, perché in caso contrario l'espressione perde significato; infatti, assegnando alla x i numeri 0, - 1, + 1, - 2 e + 2, il radicando diventa un numero negativo e, come già sai, la radice quadrata di un numero negativo non esiste nell'insieme $\mathbb{R}$:

$\sqrt{x^2-9}$	per $x = 0$ diventa $\sqrt{0-9} = \sqrt{-9}$	non esiste in $\mathbb{R}$
	per $x = -1$ oppure $+1$ diventa $\sqrt{1-9} = \sqrt{-8}$	non esiste in $\mathbb{R}$
	per $x = -2$ oppure $+2$ diventa $\sqrt{4-9} = \sqrt{-5}$	non esiste in $\mathbb{R}$

Scrivi il valore numerico che non può essere assegnato alla lettera *x* nelle seguenti espressioni letterali.

1. $\frac{2x+5y-z}{x}$; $\frac{x-y^2+3z}{x-2}$; $\frac{x^2+y^2}{x-1}$ [0; 2; 1]

2. $\frac{2y-z}{x+1}$; $\frac{x+y-z}{x-3}$; $\frac{x-5}{x+1}$; $\frac{3x-y^2+z}{25-x^2}$ [– 1; 3; 2; + 5 e – 5]

3. Il valore delle seguenti espressioni letterali è positivo qualunque sia il valore assegnato alla lettera *x*. Perché?
x^2+2; $2x^4+x^2+2$; $6+(-x)^2+(-x)^4$

4. Il valore di ciascuna delle seguenti espressioni letterali è negativo qualunque sia il valore assegnato alla lettera *x*. Perché?
$-x^2-2$; $-\frac{2}{x^2+1}$; $-3-x^2-x^4$

5. Quali valori deve assumere la lettera *x* affinché l'espressione $\sqrt{-\frac{3}{x}}$ non perda significato?
(*Ricorda che in* $\mathbb{R}$ *non esiste la radice quadrata di un numero negativo*).

6. Per ciascuna delle seguenti espressioni letterali scrivi almeno tre valori che, assegnati alla lettera *x*, fanno perdere significato all'espressione stessa.
$\sqrt{x^2-4}$; $\sqrt{9-x^2}$; $\sqrt{x^2-16}$; $\sqrt{x^2-1}$

7. Scrivi i valori che, assegnati alla lettera *x*, fanno perdere significato alla seguente espressione letterale.
$\frac{5}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$

8. Ciascuna delle seguenti espressioni letterali non perde significato qualunque sia il valore assegnato alla lettera *x*. Perché?
$\frac{x-y}{x^2+y^2+2}$; $\frac{x^2-1}{x^2+1}$; $\sqrt{x^4+1}$
$\frac{2x}{x^4+1}$; $\frac{x^2+1}{(-x)^2+2}$; $\sqrt{(-x)^2+2}$
$\sqrt{x^4+x^2+1}$; $\frac{3x}{(-x)^2+(-x)^4}$; $\sqrt{x^4-x^3}$

Quadrato di un trinomio

Calcoliamo il quadrato di un trinomio: $(A+B+C)^2$

Per eseguire questa potenza applichiamo la definizione:

$$(A+B+C)^2=(A+B+C)\cdot(A+B+C)=A^2+AB+AC+AB+B^2+BC+AC+BC+C^2$$

e riducendo i termini simili, si ha: $A^2+B^2+C^2+2\,AB+2\,AC+2\,BC$

Pertanto, **il quadrato di un trinomio è un polinomio di sei termini uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini e dei doppi prodotti di ciascuno di essi per ognuno di quelli che lo seguono.**

ESEMPIO

$$(3a-2b+c)^2=(3a)^2+(-2b)^2+(c)^2+2\cdot(3a)\cdot(-2b)+2\cdot(3a)\cdot(c)+2\cdot(-2b)\cdot(c)=$$
$$9a^2+4b^2+c^2-12ab+6ac-4bc$$

9. $(a+b-c)^2$ $(a-b-c)^2$ $(a-b+c)^2$ $(-a-b-c)^2$

10. $(x+2y+z)^2$ $(3a-2b+3c)^2$ $(2a+b-1)^2$ $(2x-y+1)^2$

11. $(a^2-b+1)^2$ $(a-3b-4)^2$ $(a^2-3b+2)^2$ $(x-2y-3)^2$

12. $(2a-3b^2+c)^2$ $\left(3x^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}\right)^2$ $\left(-2a^2-\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{2}b\right)^2$ $\left(3a^2-\frac{1}{2}a+b\right)^2$

13. $\left(\frac{5}{3}a^3+\frac{7}{2}b^2+b\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x+x^2\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{2}a^2+b\right)^2$ $\left(-\frac{3}{4}+2x-\frac{1}{3}y\right)^2$

Raccoglimento a fattor comune

In algebra ha molta importanza la scomposizione di un polinomio in fattori, cioè la trasformazione di una somma algebrica di più monomi in un prodotto.
Questa operazione non è sempre possibile, né si possono formulare regole generali atte allo scopo.
La più semplice operazione di scomposizione di un polinomio in fattori primi è quella di mettere in evidenza i fattori comuni.

ESEMPIO

a) $12a^2 - 3ab - 6ac$
se osservi attentamente questo trinomio vedi che la lettera ***a*** compare in tutti e tre i monomi; **3** poi è il M.C.D. di (12, 3, 6); pertanto, il fattore **3*a*** comune a tutti i monomi del polinomio può essere messo in evidenza:
$12a^2 - 3ab - 6ac = 3a \cdot (4a - b - 2c)$

N.B. *I monomi tra parentesi si ottengono dividendo ogni termine del polinomio di partenza per il fattore messo in evidenza, in questo caso 3a.*

b) $24x^2y^2 + 8xy^3 - 4x^3y^4 - 12x^3y^3$
In questo caso il M.C.D. di (24, 8, 4, 12) è 4; x e y^2 compaiono in tutti i termini del polinomio. Pertanto il monomio $4xy^2$, essendo comune a tutti i monomi dati, può essere messo in evidenza:
$24x^2y^2 + 8xy^3 - 4x^3y^4 - 12x^3y^3 = 4xy^2 \cdot (6x + 2y - x^2y^2 - 3x^2y)$

14. $(x+2)^2 - 2 \cdot (x+3)^2 + (x+1) - (x-1) \cdot (x+3) + (1 - x - x^2)^2 - x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2) + 4x$ $[4x^3 - 2x^2 - 9x - 9]$

15. $(a^2 - 2a + 1)^2 - (a+1) \cdot (a-1)^3 + 2 \cdot (a-1)^3$ [0]

16. $10a - 20ab = 10a \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$ $8xy - 16x^2 = 8x \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

17. $5a^2 - 15ab = 5a \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$ $5a - ab + a^2 = a \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

18. $8a^3b - 5a^2b^2 - a^2b^3 = a^2b \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$ $10x^4y^2 - 15x^3y^3 + 20x^2y^4 = 5x^2y^2 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

19. $8x^5y^2 - 10x^4y^3 + 6x^3y^4 = \ldots\ldots (4x^2 - 5xy + 3y^2)$ $12a^3b + 15a^2b - 21ab = \ldots\ldots (4a^2 + 5a - 7)$

20. $8a^4b^2 - 20a^3b^3 + 12a^2b^4 = \ldots\ldots (2a^2 - 5ab + 3b^2)$ $15x^3y - 10x^2y^2 + 20xy^3 = \ldots\ldots (3x^2 - 2xy + 4y^2)$

21. $36a^2b^3x + 24a^3b^2y - 18a^2b^2z - 12a^3b^3 = 6 \ldots\ldots\ldots (6bx + \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots - 2ab)$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi, raccogliendo in ciascuno di essi i fattori comuni.

22. $a^2 + 3a$ $x^3 + 3x^2 + x$ $4b^5 + 5b^3 + 3b^2$

23. $xyz + 2xy^2z + xyz^2$ $4ab^2 - 6a^2b - 14a^2b^2$

24. $12abc - 6a^2b + 9ab$ $5a^2b + 10ab - 25a^2b^2$

25. $8x^2y^2 - 12x^3y + 16x^2y^3$ $6b^3 + 3b + 3$

26. $a^6 - a^4 + 8a^3$ $5x - 4x^2 + 5xy$

27. $10a^2b - 15ab^2$ $18a^3b - 12a^2b^2$

28. $-4a^4b^3 + 10a^5b^2$ $15x^4b - 5x^3b$

29. $-6x^4 + 9x^3y + 3x^2y$ $12a^3b^3 - 18a^2b^4 + 12ab^2$

30. $15x^3y^2 - 12x^3yz + 3x^3z^2$ $6ab^2 - 4a^2 + 10ab$

Risolvi le seguenti espressioni letterali con monomi *(prima di eseguire le operazioni ricordati di ridurre i termini simili)*.

31. $-\frac{1}{4}ab\cdot(2a^2b)^3+\frac{2}{3}a^3b^2\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2+(a^3b)^2\cdot\left(-\frac{1}{4}ab^2\right)$ $\left[-\frac{25}{12}a^7b^4\right]$

32. $\left[-\frac{2}{5}x^4y^4:\left(-\frac{1}{5}x^3y^2\right)\right]^2\cdot\left(\frac{1}{4}x^2\right)-\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2\cdot(-2xy)^2$ $[0]$

33. $\left[\frac{2}{3}x^3y^2:\left(-\frac{1}{3}x^2y\right)-3xy\right]^2:\left[\left(-\frac{1}{4}x^5y^4\right):(-2x^4y^3)+\frac{3}{2}xy\right]$ $\left[\frac{200}{13}xy\right]$

34. $\left[\left(-\frac{3}{5}x\right)\cdot(10xy)+\left(-\frac{4}{3}x^2\right)\cdot(-9y)-5x^2y\right]^3:(-5x^4y)$ $\left[-\frac{1}{5}x^2y^2\right]$

35. $8x^2y^2\cdot\left(\frac{3}{2}x^2z-\frac{5}{4}x^2z\right)+\frac{3}{8}x^3yz\cdot(-2xy)-\left(-\frac{1}{2}x^2yz+\frac{4}{3}x^2yz\right)\cdot(2x^2y)$ $\left[-\frac{5}{12}x^4y^2z\right]$

36. $\left\{-\frac{1}{4}a^2\cdot\left[-a\cdot(-2b^2)^2:(-b)^4\right]^3\right\}^2:(-2a)^5+\frac{1}{2}a^2\cdot(-2a)^3$ $[-12a^5]$

37. $\left\{\left[\left(\frac{1}{6}a^2b^3c-\frac{5}{3}a^2b^3c\right):\left(-\frac{2}{3}ab^2c\right)\right]^2\cdot\left(-\frac{4}{9}ac^2\right)^2\cdot(-5bc+6bc)\right\}:(-abc^5)$ $[-a^3b^2]$

38. $\left[\left(-\frac{3}{2}a^3b^2\right):(-3ab)-\frac{1}{3}a^2b\right]^3-\left(-\frac{1}{3}ab\right)^3\cdot(-8a)^3$ $\left[-\frac{7}{24}a^6b^3\right]$

39. $\left(-\frac{1}{2}a^2b^2+\frac{1}{3}a^2b^2-\frac{3}{2}a^2b^2\right)^2:\left[\left(-\frac{3}{5}ab+\frac{1}{5}ab\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}a-a\right)^2\right]$ $\left[\frac{25}{4}b^2\right]$

40. $\left[\left(-\frac{1}{4}a^2bx\right)^2\cdot 3x^2\right]:\left(-\frac{1}{2}a^2b+\frac{3}{4}a^2b\right)^2+\left(-\frac{1}{2}ab^2x^3\right)^2:\left(-\frac{1}{2}a^2b^4x^2\right)$ $\left[\frac{5}{2}x^4\right]$

41. $\left[-\frac{3}{4}a^2x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}abx\right)^2\right]:\left(-\frac{1}{4}a^2bx+\frac{1}{2}a^2bx\right)^2-\left(\frac{2}{3}ab^2\right)^2:\left(-\frac{1}{3}a^2b^4\right)\cdot\frac{1}{2}x^2$ $\left[-\frac{7}{3}x^2\right]$

42. $\left(2cx-\frac{1}{2}cx\right)^2\cdot\left[3a+\frac{1}{4}a^2b:(-ab)\right]\cdot\frac{8}{33}ab^2-a^2b^2c^2x^2$ $\left[\frac{1}{2}a^2b^2c^2x^2\right]$

43. $\frac{1}{2}ab+\frac{3}{4}a^2\cdot(-ab^3):(-ab)^2+5a^4-\left[\frac{3}{2}a^5bx:(-a^3bx)\right]^2$ $\left[-\frac{1}{4}ab+\frac{11}{4}a^4\right]$

44. $\left[(-3x^4y)\cdot\left(-\frac{5}{6}x^2y^3\right):\left(-\frac{5}{3}x^2y\right)^2\right]+\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2$ $\left[\frac{23}{20}x^2y^2\right]$

45. $(a^3b^4)^4:(a^3b^4)^3+\left[\left(\frac{1}{6}a^3\right)^5\right]^0+\frac{10}{3}a^2b^3\cdot\left(-\frac{1}{5}ab\right)$ $\left[1+\frac{1}{3}a^3b^4\right]$

Risolvi le seguenti espressioni letterali con polinomi.

46. $(a-4)\cdot\left(\frac{1}{4}a^2+a-4\right)+(3a-9)\cdot(a^2-a-1)-7$ $\left[\frac{13}{4}a^3-12a^2-2a+18\right]$

47. $b\cdot\left(-\frac{1}{2}a+5b\right)-\left[a^2+\left(\frac{1}{2}a+b\right)\cdot b\right]+2a\cdot\left(a+\frac{2}{3}b\right)$ $\left[a^2+4b^2+\frac{1}{3}ab\right]$

48. $a^2+a-\left[\frac{1}{4}+4a^4+\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot(2a+1)\cdot\left(2a^2+\frac{1}{2}\right)\right]:(2a)^3$ $[a^2]$

49. $3y^2\cdot\left(-\frac{1}{3}xy-2y^2\right)-\frac{1}{2}x^2y\cdot\left(-3x+\frac{1}{3}y\right)+5y\cdot\left(-\frac{3}{4}x^3+y^3\right)$ $\left[-\frac{9}{4}x^3y-\frac{1}{6}x^2y^2-xy^3-y^4\right]$

50. $2ax\cdot\left(\frac{7}{2}a^2-9x^2+\frac{1}{2}ax\right)-\frac{2}{3}x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+a^2x-\frac{3}{2}ax^2\right)-\left(2ax^3+6a^3x\right)+3x^3\cdot\left(\frac{1}{9}+6a\right)$ $\left[a^3x+\frac{1}{3}a^2x^2-ax^3\right]$

51. $\left[\left(3y^2-2x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}xy^3\right)-\left(x-\frac{2}{3}y\right)\cdot\left(-2x^3y^2\right)\right]\cdot\frac{1}{2}x^2y+\frac{2}{3}x^5y^9:\left(-2x^2y^3\right)$ $\left[x^6y^3-\frac{3}{2}x^3y^6\right]$

52. $\frac{1}{2}ab\cdot\left[\frac{1}{2}a^3b-2ab^2\cdot\left(a^2b-ab^2\right)\right]-\left(a^3b^2-\frac{1}{2}a^3b^2+\frac{1}{4}a^3b^2\right)^2:\left(-\frac{3}{8}a^2b^2\right)$ $\left[\frac{7}{4}a^4b^2-a^4b^4+a^3b^5\right]$

53. $\{[(3a+b)\cdot(a-b-c)+b\cdot(b+c)-3a\cdot(a-c)]\cdot(a+b)+4ab\cdot(a-b)\}:2ab$ $[a-3b]$

54. $\left\{[(3x+2y)\cdot(2x-3y+1)-2y\cdot(1-3y)-3x\cdot(2x+1)]\cdot\frac{2}{5}x+2xy^2\right\}:(-2xy)$ $[x-y]$

55. $4a^3:\left\{[c\cdot(b+c)+(2a+b+c)\cdot(2a-b-c)+b\cdot(b+c)]\cdot(a-b)+b\cdot(2a)^2\right\}$ $[1]$

Risolvi le seguenti espressioni letterali con prodotti notevoli.

56. $\left\{\left[2a^2-\left(a-\frac{1}{2}b\right)\cdot\left(a+\frac{1}{2}b\right)\right]^2-\frac{1}{16}b^4\right\}-\left[\frac{1}{2}a^2\cdot\left(2a^2+b^2\right)\right]+\frac{1}{2}b^2$ $\left[\frac{1}{2}b^2\right]$

57. $[(x-2y)\cdot(x+3y)-(2x+y)\cdot(3x-y)]\cdot(-5x^2+5y^2)$ $[25x^4-25y^4]$

58. $\left[(x+1)^2-(x+1)\cdot(x-1)\right]\cdot x-2\cdot(x^3+x^2):x+5x\cdot[x\cdot(x+y)-y\cdot(x+y)]-3xy^2\cdot\left(x^2-\frac{5}{3}\right)$ $[5x^3-3x^3y^2]$

59. $19\cdot(x^3+y^3)-(3x-2y)^3-(3y-2x)^3-18xy\cdot(x+y)$ $[0]$

60. $(1+a)^2-(1-a)^2+4a+(a-1)\cdot(a-3)+1-(a-2)^2$ $[8a]$

61. $(2x-5y)\cdot(2x+5y)+(x-3y)^2+(x+4y)\cdot(-x+4y)-2x\cdot(2x-3y)$ $[0]$

62. $(b^2-1)\cdot(1+b^2)-(b^2-2)^2+[(b+1)\cdot(b-1)]^2-(b^2-2)\cdot(b^2+2)-(-2b)^2$ $[-2b^2]$

63. $(4x^2+y^2)^2-[(-2x+y)\cdot(2x+y)]^2-(-4xy-1)\cdot(-4xy+1)$ $[1]$

64. $(x+y)^3+(y-2x)^3+3\cdot(x+y)\cdot(y-2x)\cdot(-x+2y)-(2y-x)\cdot(4y^2+2xy+x^2)$ $[6x^2y-12xy^2]$

65. $\left[\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^3+\left(a^2+\frac{1}{2}\right)^3\right]\cdot\left(2a^6-\frac{3}{2}a^2\right)-4a^{12}$ $\left[-\frac{9}{4}a^4\right]$

66. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^2\cdot(2x+y)^2-\left(x^2-\frac{1}{3}y^2\right)^2-\frac{1}{36}xy^2\cdot(x+4y)-\frac{2}{3}x^3y$ $[-x^3y]$

67. $\left(a-\frac{1}{3}b\right)^2-\left(a-\frac{1}{2}b\right)\cdot\left(a+\frac{1}{2}b\right)+\frac{1}{3}b\cdot(b-a)-\left(\frac{2}{3}ab+\frac{13}{36}b^2\right)$ $\left[\frac{1}{3}b^2-\frac{5}{3}ab\right]$

68. $\left[(x+2y)^2-(x-y)\cdot(x-2y)+x(2-7y)\right]^3-8y^2(3x^2+3xy^2+y^4)$ $[8x^3]$

69. $\left[(x+y+1)\cdot(2x-y-1)+(y+1)^2-x(2x+y)-y\right]^2\cdot(x+y)+xy(x+y)$ $[x^3+x^3]$

70. $\left\{\left[(a+b+1)\cdot(a+b-1)-(a-b)^2\right]\cdot(4ab+1)+(1-3ab)\cdot(1+3ab)\right\}:a^2b^2$ [7]

71. $\left\{\left[(a+3b)\cdot(a-3b)-(a+2b)^2\right]\cdot a+4ab\cdot(a+4b)\right\}:\left[b^2+a\cdot(4a-b)-(2a-b)^2\right]$ [b]

72. $\left\{\left[(x+2y)^3-(x-2y)^3\right]:4y-y^2\right\}\cdot\left[(2x-3y)^2-x^2+12y\cdot(x-y)\right]$ [$9x^4-9y^4$]

Scrivi, come polinomi ridotti, il perimetro e l'area delle seguenti figure, utilizzando le misure riportate a fianco di ognuna di esse.

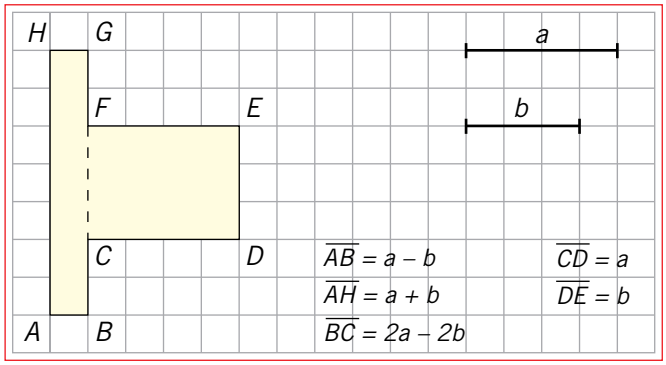
ESEMPIO

$2p_{(figura)} = (a + b) + 2 \cdot (a - b) + 2 \cdot (2a - 2b) + 2a + b = a + b + 2a - 2b + 4a - 4b + 2a + b = 9a - 4b$

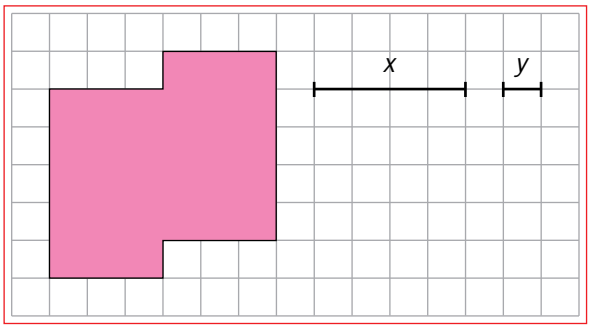
$A_{(ABGH)} = (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$A_{(CDEF)} = ab$

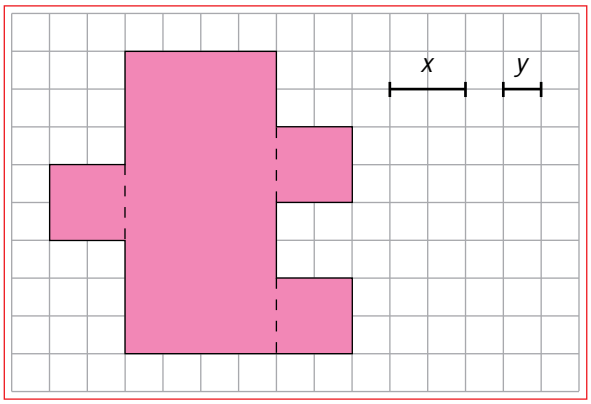
$A_{(figura)} = a^2 - b^2 + ab$



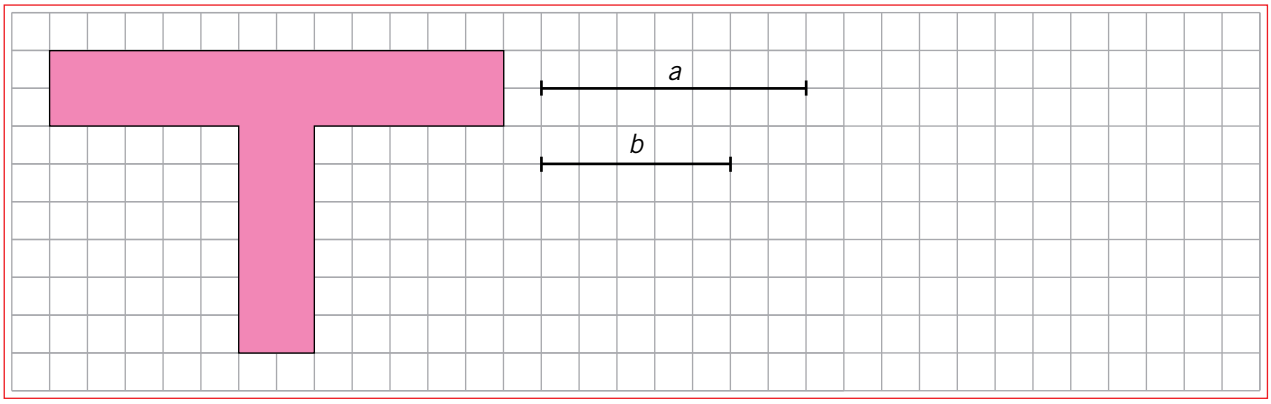
73.



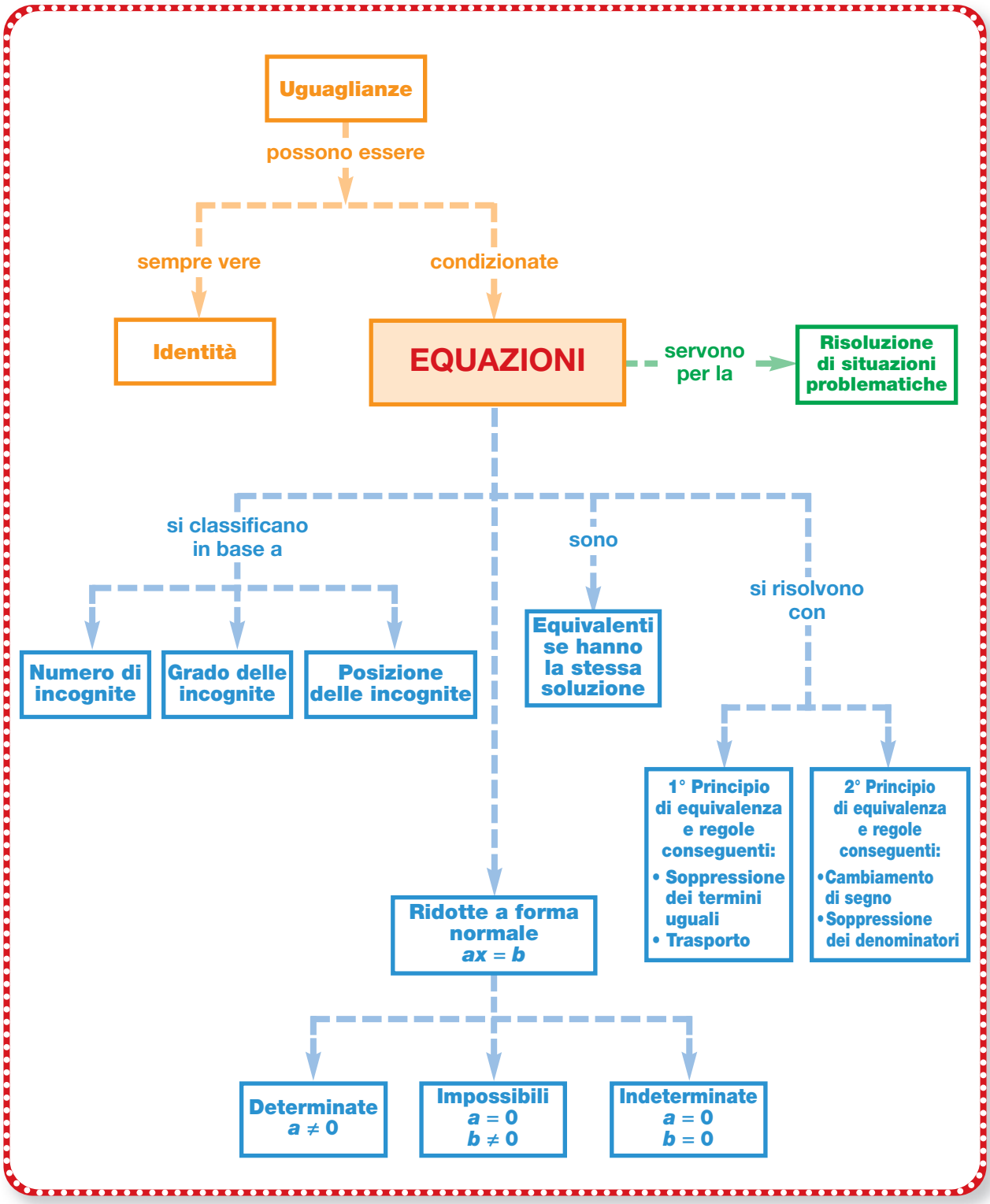
74.



75.



ESERCIZI E ATTIVITÀ PER IL RECUPERO E PER IL POTENZIAMENTO



RECUPERO

Prima di effettuare gli esercizi per il recupero è opportuno che tu riveda la teoria sul libro di testo.

Osserva il seguente schema che illustra le parti di un'**equazione**:

$$\underbrace{5x + 3}_{1° \text{ membro}} = \underbrace{-1 + X}_{2° \text{ membro}}$$

$5x$ e $+x$ sono i **termini con l'incognita**;
$+3$ e -1 sono i **termini noti**.

Risolvere un'equazione significa trovare il valore numerico che sostituito all'incognita rende vera l'uguaglianza.

Nell'equazione considerata questo valore numerico, che si chiama **soluzione** o **radice**, è $-\mathbf{1}$; infatti, sostituendo -1 all'incognita x nel testo dell'equazione, si ottiene una **identità** (cioè un'uguaglianza vera).

$$5 \cdot (-\mathbf{1}) + 3 = -\mathbf{1} + (-\mathbf{1})$$
$$-5 + 3 = -1 - 1$$
$$\boxed{-2 = -2}$$

1. Risolvi le seguenti equazioni seguendo le indicazioni:

a) $6x - 1 = 5x + 3$

applica la regola del trasporto e **sposta** al 1° membro i termini con l'incognita e al 2° membro i termini noti, **cambiando** loro **il segno**:

$6x - 5x = +1 + 3$

esegui i calcoli:

$x =$ .....

sostituisci nell'equazione data la radice $x = 4$ ed effettua la verifica:

1° membro

$6 \cdot (4) - 1 =$ .....

2° membro

$5 \cdot$ (.....) $+ 3 =$ .....;

..... = ...

b) $4 \cdot (3 - x) - 14 \cdot (x - 2) - 15 = -8 + 15$

esegui le moltiplicazioni:

$12 - 4x - 14x +$ .....

applica la regola del trasporto (cambia i segni):

$-4x - 14x$ .....

esegui i calcoli nei due membri:

.....

dividi il termine noto che sta al 2° membro per il coefficiente di x e scrivi il risultato:

..... [1]

c) $2 \cdot (1 - 2x) + 9 = x + 3 - 4 \cdot (x - 5)$

esegui le moltiplicazioni:

.....

applica la regola del trasporto (ricordati di cambiare i segni):

.....

esegui i calcoli e determina la radice dell'equazione (il coefficiente di $-x$ è -1):

.....

completa la verifica:

1° membro

$2 \cdot [1 - 2 \cdot (-12)] + 9 =$

$2 \cdot [1 + 24] + 9 =$ .....

2° membro

$-12 + 3 - 4 \cdot (-12 - 5) =$

$-12 + 3 - 4 \cdot (-17) =$ .....

.....

d) $2x - (10 + 3x) = 5 \cdot (x - 2) - 2 \cdot (x - 5)$

togli le parentesi nel 1° membro ed esegui le moltiplicazioni nel 2°:

.....

applica la regola del trasporto:

.....

esegui i calcoli e determina la radice dell'equazione:

.....

.....

se hai svolto i calcoli correttamente, la soluzione è $x = -\frac{5}{2}$; completa ora la verifica:

1° membro

$$2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - \left[10 + 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)\right] =$$

$$-5 - \left[10 - \frac{15}{2}\right] =$$

.....

2° membro

$$5 \cdot \left(-\frac{5}{2} - 2\right) - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2} - 5\right) =$$

$$5 \cdot \left(\frac{-5-4}{2}\right) - 2 \cdot \left(\frac{-5-10}{2}\right) =$$

.....

.....

se hai svolto la verifica correttamente, l'identità che ottieni è:

$$-\frac{15}{2} = -\frac{15}{2}.$$

Risolvi le seguenti equazioni e verifica la soluzione ottenuta.

2. $3x - 4 \cdot (x - 1) = 2 + 2 \cdot (x - 3) - x$ [4]

3. $-4 \cdot (x - 3) - 3 \cdot (x - 3) + 1 = x + 2 \cdot (x + 1)$ [2]

4. $3 - 1 \cdot (-3 + x) = 2 \cdot (x - 2) + 6 - (x - 4)$ [0]

5. $-4x - 5 \cdot (-x + 3) = -4 + 5x - 32 - (3x + 9)$ [30]

6. $7 \cdot (7 - x) + 6 \cdot (7x + 3) = 3 \cdot (2x + 3) + x + 2$ [−2]

7. $2 \cdot (x + 1) - 3 \cdot (x + 3) = 6 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (x + 3)$ [−2]

8. $5 \cdot (5 - 4x) - 3 \cdot (4x + 3) = 2 \cdot (2 - x)$ $\left[\frac{2}{5}\right]$

9. $2 \cdot (3x - 4) - 5 \cdot (x - 1) = 4 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (x - 1)$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

10. $5 \cdot (5x + 7) - 3 \cdot (3x + 5) = 2 \cdot (4x + 9) + 7 \cdot (x + 1)$ [5]

11. $3 \cdot (2x + 5) + 5 \cdot (x + 3) = 4 \cdot (4x + 7) - (x + 6)$ [2]

12. $9 \cdot (x + 4) - 4 \cdot (12 - x) = 5 \cdot (3x - 2) - 8 \cdot (x - 5)$ [7]

13. $17 \cdot (x - 7) - 3 \cdot (x + 10) = 5 \cdot (2x + 3) - 8 \cdot (x + 4)$ [11]

14. $13 \cdot (x - 8) + 7 \cdot (2x - 19) = 8 \cdot (x + 5) - 5 \cdot (19 - x)$ [13]

15. Risolvi le seguenti equazioni seguendo le indicazioni.

a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x + 5$

determina il m.c.d. tra 2, 4 e 8 e applica il 2° principio di equivalenza per eliminare i denominatori; m.c.d. (2, 4, 8) = 8:

$$\cancel{8}^{1} \cdot \frac{4x + \ldots\ldots\ldots}{\cancel{8}_{1}} = \frac{\ldots\ldots\ldots + 40}{\cancel{8}_{1}} \cdot \cancel{8}^{1}$$

$4x + \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots + 40$

applica la regola del trasporto (ricorda di cambiare i segni):

$4x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = +40$

esegui i calcoli e determina il valore di x:

.....

Completa la verifica:

$$\frac{1}{\cancel{2}^{1}} \cdot \cancel{8}^{4} + \frac{1}{4} \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{8} \cdot (\ldots\ldots\ldots) + 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) $x - 1 - \frac{3}{2}x = \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

determina il m.c.d. tra 2 e 4 e applica il 2° principio di equivalenza per la soppressione dei denominatori; m.c.d. (2; 4) = 4:

$$\cancel{4} \cdot \frac{4x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\cancel{4}_{1}} = \frac{3x - \ldots\ldots\ldots}{\cancel{4}_{1}} \cdot \cancel{4}^{1}$$

applica la regola del trasporto (cambia i segni):

.....

esegui i calcoli e determina il valore di x:

.....

Completa la verifica:

$$2 - 1 - \frac{3}{\cancel{2}} \cdot (\cancel{2}^{1}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{3}{4} \cdot (\ldots\ldots\ldots) - \frac{7}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) $\frac{2x + 3}{3} = \frac{5x - 3}{4}$

determina il m.c.d. tra 3 e 4 e sopprimi i denominatori; m.c.d. (3; 4) = 12:

$$\cancel{12}^{1} \cdot \frac{4 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\cancel{12}_{1}} = \frac{3 \cdot (5x - 3)}{\cancel{12}_{1}} \cdot \cancel{12}^{1}$$

esegui le moltiplicazioni:

.....

applica la regola del trasporto (cambia i segni):

.....

esegui i calcoli e determina il valore di x:

.....

Completa la verifica:

$$\frac{2\cdot(3)+3}{3}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{5\cdot(\ldots\ldots\ldots)-3}{4}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d) $\frac{5+x}{4}=\frac{5-x}{5}+\frac{1+x}{4}-1$

determina il m.c.d. tra 4 e 5 e sopprimi i denominatori; m.c.d. (4; 5) = 20:

$$\cancel{20}^{1}\cdot\frac{5\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\cancel{20}_{1}}=$$

$$=\frac{4\cdot(5-x)+5\cdot(\ldots\ldots\ldots)-20}{\cancel{20}_{1}}\cdot\cancel{20}^{1}$$

esegui le moltiplicazioni:

.....

applica la regola del trasporto (cambia i segni):

.....

esegui i calcoli e determina il valore di x:

.....

Completa la verifica:

1° membro

$$\frac{5+(-5)}{4}=\frac{5-5}{4}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2° membro

$$\frac{5-(-5)}{5}+\frac{1+(-5)}{4}-1=\frac{5+5}{5}+\left(\frac{-4}{4}\right)-1=$$

.....

Risolvi le seguenti equazioni e verifica l'esattezza della radice ottenuta.

16. $11-\frac{1}{3}x=x+\frac{1}{2}x$ [6]

17. $3-x=\frac{x-6}{2}$ [4]

18. $\frac{1}{4}+2x=\frac{5}{3}+\frac{7}{12}x$ [1]

19. $\frac{x+1}{2}=\frac{2x-1}{3}$ [5]

20. $\frac{10x-25}{4}=\frac{1}{12}+\frac{19-4x}{6}$ [3]

21. $\frac{2x-2}{3}+\frac{1}{5}x=\frac{3x-6}{4}+2$ [10]

22. $\frac{2+x}{3}+\frac{x-1}{6}=\frac{3-2x}{5}+x$ [– 1]

23. $\frac{2x+6}{3}+\frac{3x+9}{4}=\frac{x+1}{2}+1$ [– 3]

24. $\frac{x-2}{4}+\frac{2x-1}{3}=x-\frac{1}{3}$ [– 6]

25. $3\cdot(x+1)+\frac{9x-9}{2}=2x-7$ [– 1]

Completa la risoluzione dei seguenti problemi numerici impostando equazioni; segui le indicazioni.

26. La differenza tra il quintuplo e il doppio di un numero è 51; determina il numero.

numero incognito	x
quintuplo del n° incognito	$5x$
doppio del n° incognito	.....

equazione che traduce il problema:

$5x - 2x = 51$

..... da cui

$$x=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

il numero cercato è ..... [17]

27. Il doppio di un numero, aumentato di 3, è uguale alla differenza tra 17 ed il quintuplo del numero stesso. Qual è il numero?

numero incognito	x
doppio del n° incognito	.....
quintuplo del n° incognito	.....

equazione che traduce il problema:

$2x + 3 = 17 - 5x$

.....

$$x=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

28. Un negoziante vende $\frac{1}{4}$, poi $\frac{2}{5}$ e infine $\frac{1}{10}$ di una certa merce, vendendo complessivamente 120 kg di quella merce. Qual è il peso totale della merce?

totale merce	x
$\frac{1}{4}$ del totale della merce	.....
$\frac{2}{5}$ del totale della merce	.....
$\frac{1}{10}$ del totale della merce	.....

equazione che traduce il problema:

$\frac{1}{4}x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}x =$ .....

.....

$x =$ ..... = ...

il totale della merce è..... [160 kg]

Risolvi i seguenti problemi impostando un'equazione.

29. Il doppio di un numero, aumentato di 9, è uguale alla differenza tra 34 e il triplo del numero stesso. Qual è il numero? [5]

30. Il triplo di un numero, diminuito di 50, è uguale a 70. Qual è il numero? [40]

31. Il quadruplo di un numero, diminuito di 5, è uguale al triplo del numero stesso, aumentato di 7; determina il numero. [12]

32. La differenza tra la metà e la terza parte di un numero è uguale a 5. Determina il numero. [30]

33. La metà di un numero, aumentata di 9, è uguale alla differenza tra il numero stesso e la sua terza parte; calcola il numero. [54]

34. Determina quel numero il cui doppio è uguale ai suoi $\frac{3}{5}$ aumentati di 35. [25]

35. Calcola il numero che diminuito del suo triplo dà 10. [– 5]

36. In una cartoleria si vendono prima i $\frac{9}{15}$ e poi $\frac{1}{5}$ del totale dei quaderni presenti in magazzino. Quanti erano i quaderni se dopo le vendite restano ancora 36 quaderni in magazzino? [180]

37. In una fattoria ci sono 192 volatili: il numero dei tacchini è il triplo di quello delle oche e il numero delle galline è il quadruplo di quello dei tacchini. Calcola il numero di ogni tipo di volatile. (*Indica con x il numero delle oche; quello dei tacchini sarà ...; e quello delle galline 4 · ...*) [12; 36; 144]

Completa la risoluzione dei seguenti problemi geometrici impostando equazioni; segui le indicazioni.

38. La somma di tre segmenti misura 175 cm; il secondo è il doppio del primo e il terzo segmento supera il secondo di 15 cm. Quanto misura ciascun segmento?

primo segmento	x
secondo segmento	2.....
terzo segmento	$2x$ + ...

equazione che traduce il problema:

x + ... + ... = 175

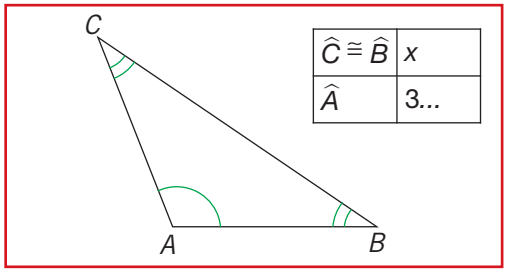
.....

$x = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$ = ... misura del 1° segmento

2° segmento = 2 · ..... = ...

3° segmento = ... [32 cm; 64 cm; 79 cm]

39. L'angolo al vertice di un triangolo isoscele è il triplo di ciascuno degli angoli alla base; determina le ampiezze dei tre angoli.



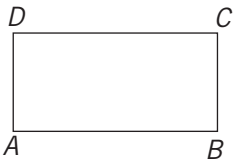
equazione che risolve il problema:

$x + x +$ ..... = 180°

$x =$ ..... ampiezza di $\widehat{C}$ e di $\widehat{B}$

$\widehat{A} =$ ..... [36°; 36°; 108°]

40. La base di un rettangolo è uguale al doppio dell'altezza, diminuito di 4. Sapendo che il perimetro misura 160 dm, determina le due dimensioni.



DA = altezza	*x*
AB = base	*2x–.....*

equazione che traduce il problema:

$2 \cdot (x + 2x - .....) = 160$

.....

$x = \frac{.....}{.....} = ...$ dm misura dell'altezza *DA*

$\overline{AB}$ = base = ... [28 dm; 52 dm]

Risolvi i seguenti problemi impostando un'equazione.

41. La somma di quattro segmenti misura 88 cm. Calcola la misura di ciascuno dei quattro segmenti sapendo che il secondo segmento è il triplo del primo, il terzo è il doppio del secondo e il quarto è il doppio del terzo.
(*Indica con x il primo segmento, il secondo è 3x, il terzo 2 · 3x ...*)
[4 cm; 12 cm; 24 cm; ...]

42. La somma di quattro segmenti misura 214 dm. Il secondo, il terzo e il quarto segmento superano il primo rispettivamente di 6 dm, 20 dm e 44 dm. Determina la lunghezza di ciascuno dei quattro segmenti.
(*Indica con x il primo segmento, il secondo è x + 6; ...*) [36 dm; 42 dm; 56 dm; 80 dm]

43. Il perimetro di un triangolo scaleno misura 228 cm. Calcola la misura di ciascuno dei lati sapendo che il secondo lato è il triplo del primo e il terzo lato è il doppio del primo.
[38 cm; 114 cm; 76 cm]

44. Considera un triangolo *ABC* e determina le ampiezze di ciascun angolo sapendo che $\hat{B} = \frac{4}{3}$ di $\hat{C}$ e $\hat{A} = \frac{5}{3}$ *di* $\hat{C}$.
(*Indica con x l'ampiezza di* $\hat{C}$*...;*)
[45°; 60°]

45. Il perimetro di un triangolo isoscele misura 85 m e ciascuno dei lati obliqui supera la base di 5 m. Calcola le misure della base e dei lati obliqui.
(*Indica con x la base ...*)
[25 m; 30 m; .....]

46. Le dimensioni di un rettangolo sono una i $\frac{4}{5}$ dell'altra e il perimetro misura 36 m. Determina le dimensioni e l'area del rettangolo.
(*Indica con x una dimensione; l'altra è* $\frac{4}{5}x$ *...*)
[10 m; 8 m; .....

47. La base di un rettangolo supera di 12 dm il doppio dell'altezza. Sapendo che il perimetro misura 114 dm, calcola le dimensioni e l'area del rettangolo. [15 dm; 42 dm; 630 dm^2]

POTENZIAMENTO

Risolvi e verifica (quando è possibile) le seguenti equazioni.

1. $2x - \left[\frac{x+2}{4} - \left(\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{4}\right) - 3\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{3-x}{2}\right) + \frac{3}{4}x$ $\left[-\frac{7}{6}\right]$

2. $\frac{5}{2} \cdot \left(2 - \frac{x+1}{3}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot (2x+3)}{3} + \frac{4 \cdot (2x-1)}{3}\right] = \frac{1}{6} - x$ [2]

3. $\frac{1}{3} \cdot \left\{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{2}x - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)\right]\right\} = \frac{x+2}{3} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2-3x}{2} - \frac{x+6}{3}\right)$ $\left[-\frac{62}{7}\right]$

4. $\frac{1}{4} \cdot \left[(x-2) \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot (1-x)\right] + \frac{1}{2} \cdot (x+1) = x - \frac{5}{8}$ [indeterminata]

5. $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x+3}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{x-2}{2}\right] + \frac{1}{4}x = \frac{x-2}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{x-3}{2}\right)$ $\left[-\frac{17}{3}\right]$

6. $\frac{5x+1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{(3x-2)^2}{9}=2x-\frac{(3x+1)\cdot(2-3x)}{9}$ [1]

7. $\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2=\frac{3}{2}\cdot\left(2x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left[x-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}x\right)\right]$ $\left[\frac{7}{5}\right]$

8. $2\cdot\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{35}{24}=x-\frac{2x+1}{3}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

9. $\frac{6\cdot[(x-1)\cdot(x+1)-(x+2)\cdot(x-3)]}{5}=\frac{2\cdot(x-1)}{5}+\frac{x+3}{10}+5$ $\left[-\frac{11}{7}\right]$

10. $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-x}{\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{3}-x}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{1}{5}-x}{\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}x}{\frac{1}{5}}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

11. $x-\frac{\frac{4-x}{4}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2x+1}{2}}{2-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{6-x}{3}}{\frac{1}{3}-1}-2;\qquad 1+\frac{x}{2}-\frac{x+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1+\frac{x-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{19}{15}$ [2; 0]

Esamina la risoluzione delle seguenti equazioni e, se errata, correggila.

12.
$$\frac{x-1}{2}-1=3x$$
$$x-1-2=3x$$
$$x-3x=3$$
$$-2x=3$$
$$x=-\frac{3}{2}.$$

13.
$$\frac{5x-1}{2}-\frac{3x-2}{3}=0.$$
$$15x-3-6x+4=6$$
$$9x+1=6$$
$$9x=5$$
$$x=\frac{5}{9}$$

14.
$$\frac{x-2}{3}-\frac{1-2x}{2}=1$$
$$2x-4-3-6x=6$$
$$-4x=-4-3+6$$
$$-4=-1$$
$$x=\frac{1}{4}$$

15.
$$\frac{2x-1}{3}-\frac{2x-1}{2}=1$$
$$4x-2-6x+3=6$$
$$-2x=5$$
$$x=-3$$

Equazione pura di secondo grado.

Uguaglianze del tipo: $4x^2=9$, $16x^2=36$, $25x^2=81$ si dicono equazioni pure di secondo grado; $ax^2=b$, con $a\neq 0$ da cui si ottiene:

$$\boxed{x^2=\frac{b}{a}}$$

Ricordando le regole per l'estrazione della radice quadrata di un numero relativo, si ha: $\boxed{x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}}$

dove il rapporto $\frac{b}{a}$ deve essere positivo.

Quando $\frac{b}{a}$ è negativo non c'è soluzione nell'insieme dei numeri reali relativi.

ESEMPIO

$4x^2=9\rightarrow x^2=\frac{9}{4}\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$ infatti $\left(+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ e $\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$-9x^2=49$ $x^2=-\frac{49}{9}$ $x=\sqrt{-\frac{49}{9}}$ nessuna soluzione in $\mathbb{R}$

non c'è soluzione in $\mathbb{R}$ perché non esiste un numero relativo che elevato alla seconda dia $-\frac{49}{9}$.

Un'equazione di secondo grado nella forma $ax = b$, con $\frac{b}{a} > 0$, ammette, quindi, due soluzioni opposte:

$$+\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ e } -\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado

16. $3 \cdot (x^2 + 5) = 4 \cdot (2x^2 - 3) - 2x^2$
risolvi le operazioni indicate:
$3x^2 + \ldots\ldots = 8x^2 - \ldots\ldots - 2x^2$
applica la regola del trasporto per portare i termini con l'incognita al 1° membro e i termini noti al 2°; riduci poi i termini simili:
..... = ...
$-3x^2 = 27$ da cui $x^2 = \frac{-27}{-3} = 9$
$x = \pm\sqrt{\ldots\ldots\ldots} = \pm\ldots\ldots\ldots$

17. $4 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (x^2 + 32) = (x + 2)^2$
..... = ...
..... = ...
$x^2 = \ldots\ldots$ da cui $x = \pm\sqrt{\ldots} =$

18. $\frac{x^2+5}{3} + 1 = \frac{2x^2-3}{2}$
applica la regola per la soppressione dei denominatori numerici: .....
prosegui da solo: .....
.....
$x = \pm\sqrt{\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}} = \pm\frac{5}{2}$

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado sapendo che x appartiene all'insieme dei numeri reali relativi ($x \in \mathbb{R}$)

19. $x^2 - 9 = 0$ $\quad x^2 - 36 = 0$ $\quad [\pm 3; \pm 6]$

20. $x^2 + 9 = 0$ $\quad x^2 - 1 = 0$ $\quad$ [impossibile; ± 1]

21. $25 - x^2 = 0$ $\quad x^2 + 64 = 0$ $\quad$ [± 5; impossibile]

22. $9x^2 - 16 = 0$ $\quad 4x^2 - 1 = 0$ $\quad \left[\pm\frac{4}{3}; \pm\frac{1}{2}\right]$

23. $3x^2 - 75 = 0$ $\quad 2x^2 - 200 = 0$ $\quad [\pm 5; \pm 10]$

24. $(x + 1) \cdot (x - 1) = 0$ $\quad (2x + 5) \cdot (2x - 5) = 0$ $\quad \left[\pm 1; \pm\frac{5}{2}\right]$

25. $(x - 4) \cdot (x + 4) = 9$
$(x + 2) \cdot (x - 2) = (x + 1) \cdot (x - 1)$
[± 5; impossibile]

26. $3 + (6 - x)^2 + (2x + 3)^2 = (x + 2)^2 - 4 \cdot (x - 15)$ $\quad [\pm 2]$

27. $x^2 + 2 - 2 = 2 \cdot (x - 1) + 49$ $\quad [\pm 7]$

28. $(2 + x)^2 - 2 \cdot (2 + x^2) = 4 \cdot (x - 1)$ $\quad [\pm 2]$

29. $(x - 3)^2 + 6x - 14 = x^2 + (x + 3) \cdot (x - 3)$ $\quad [\pm 2]$

30. $(x - 5)^2 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{5}{11} = -(x + 5) \cdot (x - 5) - 10x$ $\quad \left[\pm\frac{5}{11}\right]$

31. $-\frac{x^2-1}{2} = -\frac{x^2}{6} + 6x^2 - \frac{x^2+3}{3}$ $\quad \left[\pm\frac{1}{2}\right]$

32. $x^2 - 4 + \frac{5x^2-1}{4} = \frac{1}{5} + (x-2)\cdot(x+2)$ $\quad \left[\pm\frac{3}{5}\right]$

33. $x + \frac{(1-2x)^2}{6} = \frac{7}{18} + \frac{(x+2)^2}{12} - \frac{x^2-36}{18}$ $\quad [\pm 2]$

34. Dividi il numero 43 in tre parti in modo che la differenza tra la prima e la seconda parte sia uguale a 5 e che la differenza tra la seconda e la terza sia uguale a 7. (*Indicando con x la terza parte, la seconda sarà x + 7...*) [20; 15; 8]

35. Dividi il numero 90 in tre parti sapendo che la prima è doppia della terza e che la differenza tra la prima parte e la seconda è uguale alla differenza tra la seconda parte e la terza. [40; 30; 20]

36. Un numero naturale è formato da tre cifre, la cui somma è 12. Determina il numero sapendo che la cifra delle centinaia è il doppio di quella delle unità e che la cifra delle decine è $\frac{3}{2}$ di quella delle centinaia. [462]

37. Determina le età di quattro fratelli sapendo che esse sono direttamente proporzionali ai

numeri 6, 7, 8 e 9 e che la somma delle età del secondo e del terzo è uguale alla somma delle età del primo e del quarto.

[indeterminato]

38. Un automobilista inizia il suo viaggio da un casello autostradale e percorre 90 km all'ora. Dopo due ore dallo stesso casello parte un altro automobilista che percorre 120 km all'ora sullo stesso percorso. Quante ore impiega il secondo automobilista per raggiungere il primo?

[6 ore]

39. In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{4}{5}$ dell'ipotenusa e il perimetro misura 108 dm. Determina l'area del triangolo rettangolo.
(*Se indichi con x l'ipotenusa, il cateto diventa* $\frac{4}{5}x$. *Per trovare l'altro cateto si applica il teorema di Pitagora:*

$$c=\sqrt{x^2-\left(\frac{4}{5}x\right)^2}=\sqrt{x^2-\frac{16}{25}x^2}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

imposta poi l'equazione utilizzando la relazione espressa dal perimetro.)

[486 dm^2]

40. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è i $\frac{13}{5}$ di un cateto e il perimetro misura 60 cm. Determina l'area del triangolo rettangolo. (*Vedi nota problema precedente*).

[120 cm^2]

41. Un solido è formato da un cilindro sormontato da un cono avente la base coincidente con la base del cilindro. Il volume di tutto il solido è 528π dm^3 e l'altezza del cilindro misura 12 dm. Determina la misura del raggio di base del cilindro, sapendo che il rapporto tra l'altezza del cilindro e l'altezza del cono è $\frac{3}{2}$.

[6 dm]

42. In un trapezio isoscele avente il perimetro di 44 cm, la base minore è rispettivamente $\frac{1}{3}$ della base maggiore e i $\frac{3}{5}$ del lato obliquo.
Determina l'area della superficie e il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezio intorno alla base maggiore.

[256π cm^2; 640π cm^3]

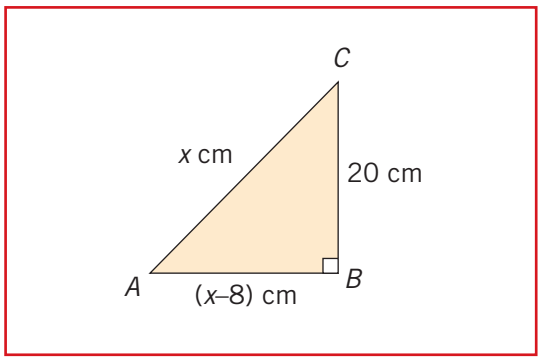
43. Il rapporto tra i cateti di un triangolo rettangolo è $\frac{3}{4}$ e il perimetro misura 120 dm.
Determina l'area della superficie totale e il volume del solido generato dalla rotazione di 360° del triangolo attorno all'ipotenusa.

[1680π dm^2; 9600π dm^3]

44. In un trapezio rettangolo la somma della base maggiore, della base minore e dell'altezza è 36,5 dm. Sapendo che il rapporto tra la base minore e la base maggiore è $\frac{3}{4}$ e che il rapporto tra l'altezza e la base maggiore è $\frac{6}{7}$, determina l'area della superficie e il volume del solido generato dalla rotazione di 360° del trapezio attorno alla base maggiore.

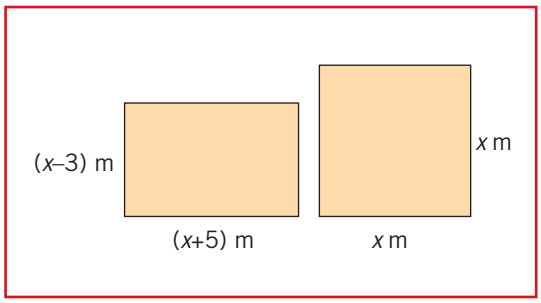
[546π dm^2; 1680π dm^3]

45. Considera il triangolo rettangolo dell'illustrazione e, utilizzando il teorema di Pitagora, imposta e risolvi l'equazione che ti permette di determinare le lunghezze di *AB* e *AC*.



[29 cm; ...]

46. Il rettangolo e il quadrato dell'illustrazione sono equivalenti. Imposta e risolvi l'equazione che ti permette di trovare le dimensioni del rettangolo e il lato del quadrato.



[7,5 m; ...]

Considera i seguenti paradossi matematici e individua dove è stato commesso l'errore

47. Primo Paradosso.
Il numero 2 è uguale al numero 1

Consideriamo due numeri uguali:	$x = y$
moltiplicando i due membri per x si ha:	$x^2 = xy$
togliendo y^2 da ambo i membri otteniamo:	$x^2 - y^2 = xy - y^2$
	$(x + y) \cdot (x - y) = y \cdot (x - y)$
dividendo i due membri per $(x - y)$ si ha:	$x + y = y$
e ponendo y al posto di x si può scrivere:	$y + y = y$ cioè $2y = y$
e dividendo per y i due membri	$2 = 1$

Dove è stato commesso l'errore?

48. Secondo Paradosso.

Tutti i numeri sono uguali fra loro

Siano x e y due numeri qualunque, poniamo	$x - y = z$
moltiplicando i due membri dell'uguaglianza per la differenza $(x - y)$ si ha una nuova uguaglianza:	$(x - y)^2 = z \cdot (x - y)$
cioè:	$x^2 - 2xy + y^2 = xz - yz$
che si può scrivere:	$x^2 - xy - xy + y^2 = xz - yz$
e trasportando opportunamente i termini:	$x^2 - xy - xz = xy - yz - y^2$
mettendo in evidenza x nel 1° e y nel 2° membro:	$x \cdot (x - y - z) = y \cdot (x - y - z)$
dividendo i due membri per $(x - y - z)$ si ha	$x = y$

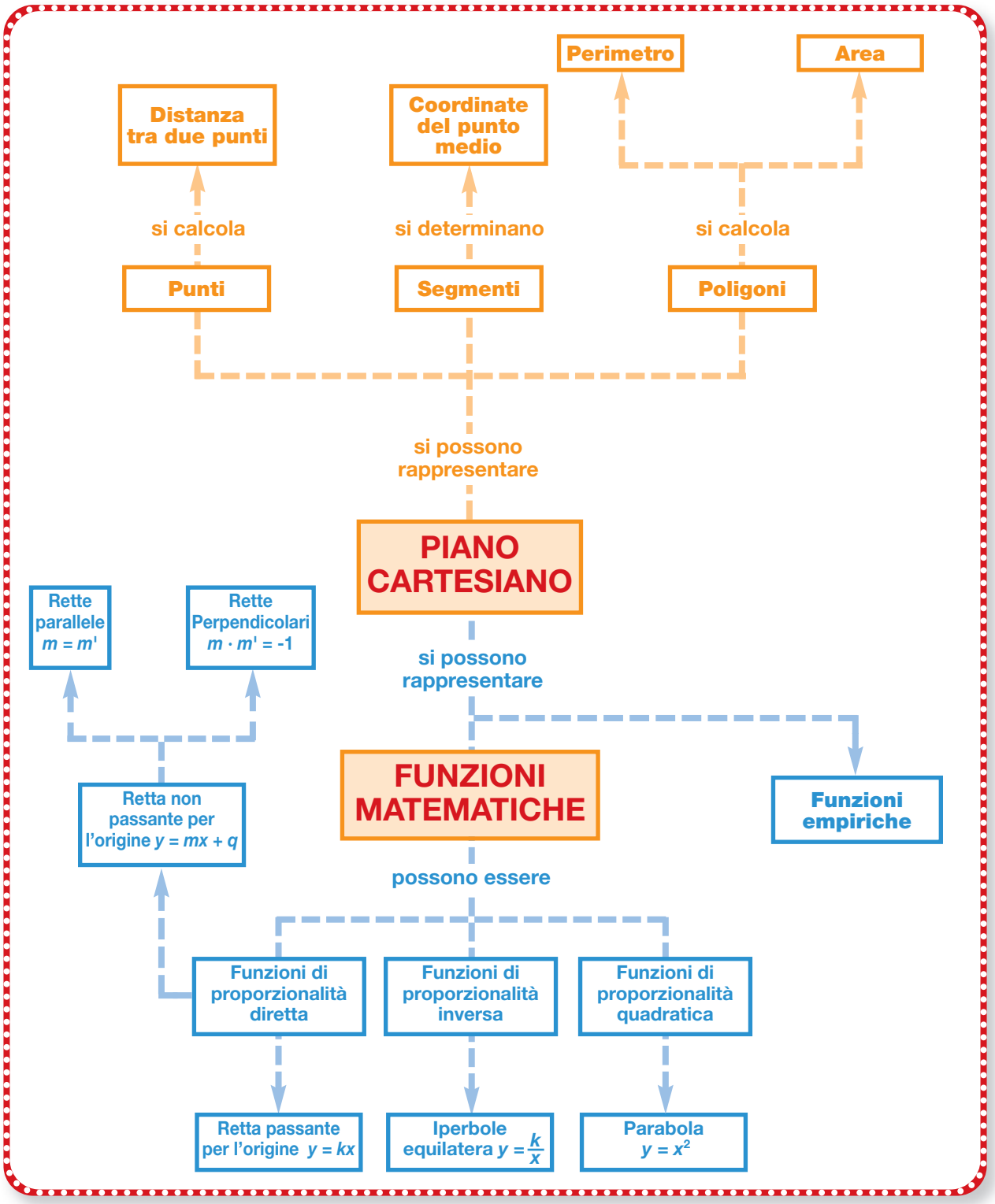
ciò prova che: tutti i numeri sono uguali fra loro.

Dove è stato commesso l'errore?

(da "Matematica dilettevole e curiosa" - Italo Ghersi, Hoepli)

4 Funzioni matematiche e piano cartesiano

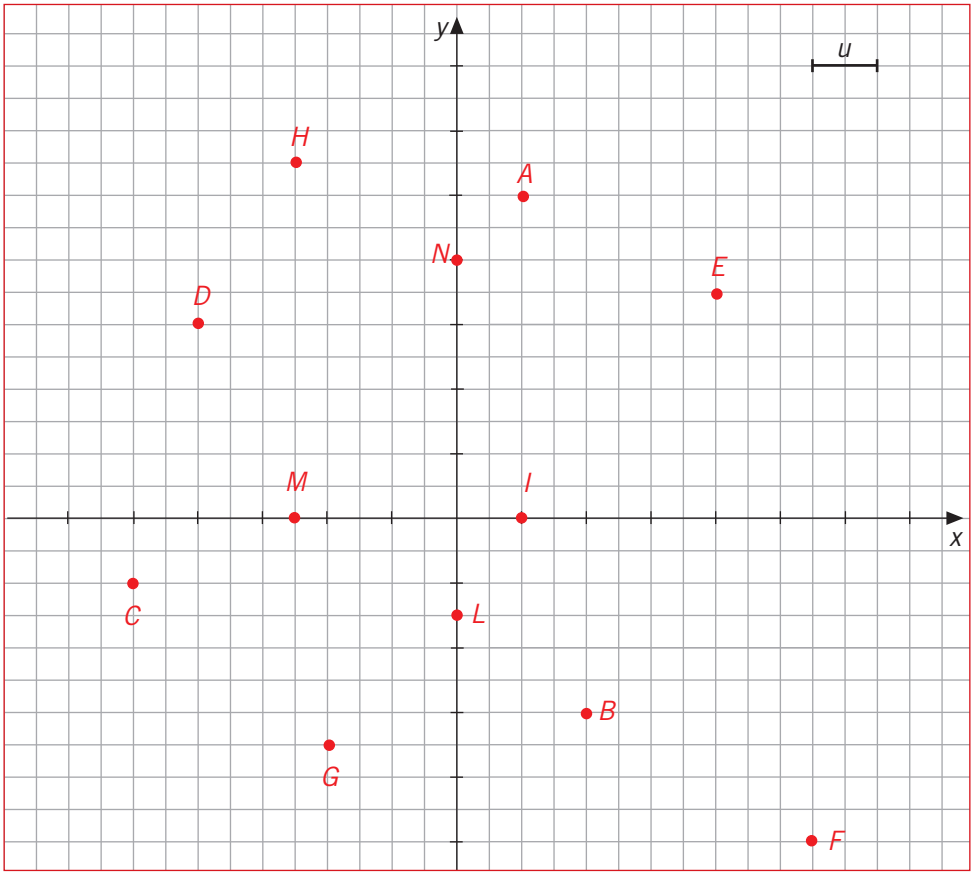
ESERCIZI E ATTIVITÀ PER IL RECUPERO E PER IL POTENZIAMENTO



RECUPERO

Prima di effettuare gli esercizi per il recupero
è opportuno che tu riveda la teoria sul libro di testo.

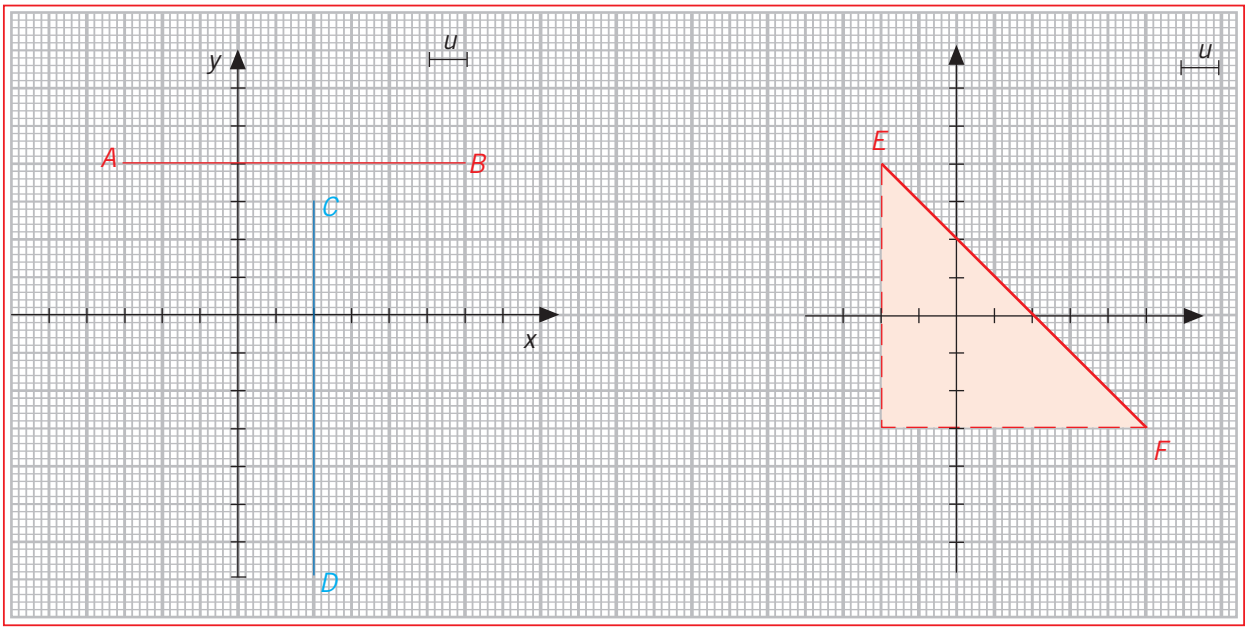
1. Considera le coordinate dei punti rappresentati nel piano cartesiano sottostante; alcune sono errate; contrassegnale e correggile.



- ☒ *A* (5;1)
- ☐ *B* (2;3)
- ☐ *C* (– 5;1)
- ☐ *D* (– 4;3)
- ☐ *E* (4;4)
- ☐ *F* (5,5;– 5)
- ☐ *G* (– 2;– 3,5)
- ☐ *H* (– 2,5; 5,5)
- ☐ *I* (1;0)
- ☐ *L* (– 1,5;0)
- ☐ *M* (0;– 2,5)
- ☐ *N* (0;4)

A (1;5) .....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Calcola la lunghezza dei segmenti *AB*, *CD*, *EF*. (*Segui le indicazioni*).



- segmento *AB* parallelo all'asse *x*
  individua le coordinate degli estremi:
  A (– 3;4) *B* (6;.....)
  le ordinate dei due punti sono uguali; la distanza tra i due punti è la differenza tra le ascisse:
  $\overline{AB} = |x_A - x_B| = |-3 - .....| = |.....| = ...$
- segmento *CD* parallelo all'asse *y*
  individua le coordinate degli estremi:
  C (.....) *D* (.....)
  i due punti hanno la stessa ascissa; la lungheza del segmento è la differenza tra le ordinate:
  $\overline{CD} = |y_C - y_D| = |3 - (-7)| = |.....| = ...$
- segmento *EF*
  individua le coordinate degli estremi:
  E (.....) *F* (.....)
  il segmento *EF* viene considerato come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo; la sua lunghezza si calcola utilizzando la formula:

$$\overline{EF} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2} = \sqrt{(-2-5)^2 + [4-(-3)]^2} = \sqrt{.....} = \sqrt{.....} = \sqrt{98} = ...$$

Le seguenti coppie di coordinate cartesiane individuano dei segmenti; riportale su un piano cartesiano, congiungi i punti e determina le lunghezze dei segmenti ottenuti.

3. *A* (– 3;6); *B* (5;6)
$\overline{AB} = |x_A - x_B| = ...$

4. *B* (– 5;4); *C* (– 5;– 5)
$\overline{BC} = |y_B - y_C| = ...$

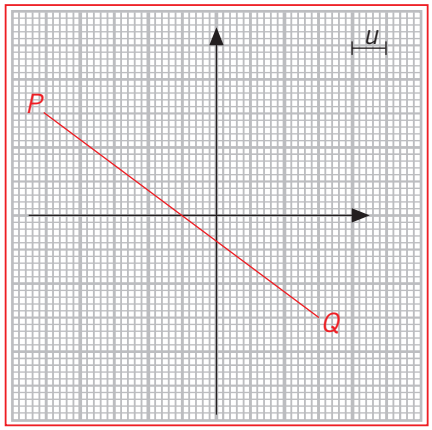
5. *D* (2;7); *E* (6;4)
$\overline{DE} = \sqrt{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2} = ...$
.....

6. *N* (9;– 1); *P* (– 3;– 6)
$\overline{NP} = \sqrt{.....} =$
.....

7. *R* (3;– 5); *S* (3;6)
$\overline{RS} = |y_R - .....| = ...$

8. *C* (– 10;2); *D* (3;2)
$\overline{CD} = |..... - 3| = ...$

9. Determina le coordinate del punto medio del segmento *PQ* e, dopo averlo individuato nel piano cartesiano, verifica l'esattezza dei tuoi calcoli.



Individua le coordinate degli estremi: *P* (.....;.....) e *Q* (.....;.....)
determina le coordinate del punto medio *M*, utilizzando le formule indicate per trovare la semisomma delle ascisse e delle ordinate degli estremi del segmento:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{-5+3}{2} = \frac{.....}{2} = ... \\ y_M &= \frac{y_P + y_Q}{2} = \frac{.....+(-3)}{2} = \frac{0}{2} = ... \end{aligned}\right\} \text{quindi } M(.....;.....)$$

Rappresenta il punto *M* nel piano cartesiano e verifica.

Rappresenta sul piano cartesiano i punti di ciascuna coppia e determina le coordinate dei punti medi dei segmenti individuati.

10. A (2;2) e B (10;6)

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

M (.....;.....)

11. I (– 7;– 1) e L (– 3;3)

$x_M = \frac{x_I + x_L}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y_M = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

M (.....;.....)

12. E (4;0) e F (– 2;– 6)

$x_M = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$y_M = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

M (.....;.....)

Rappresenta nel piano cartesiano i segmenti di cui ti vengono fornite le coordinate degli estremi, calcola le lunghezze dei segmenti e determina le coordinate del punto medio.

13. A (– 3;10) e B (– 3;– 2)

14. N (4;2) e O (4;5)

15. R (– 7;– 1) e S (1;5) [10 u]

16. E (– 2;7) e F (3;– 5) [13 u]

17. Rappresenta nel piano cartesiano il triangolo rettangolo ABC di vertici: A (– 4;3); B (2;3); C (2;6) e calcolane perimetro e area.

La misura del lato AB è la distanza tra A e B:

$\overline{AB} = |x_A - x_B| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

la misura del lato BC è la distanza tra B e C:

$\overline{BC} = |y_B - y_C| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

la misura del lato AC è la distanza tra A e C:

$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

calcola il perimetro e l'area:

$2p_{(ABC)} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ [15,7 u; 9 u^2]

18. Rappresenta nel piano cartesiano il rettangolo $ABCD$ di vertici: A (– 2;– 3); B (3;– 3); C (3;4); D (– 2; 4), calcola la misura della diagonale AC, quella del perimetro e l'area.

La misura della diagonale AC è la distanza tra A e C:

$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

.....

Le misure dei lati AB e BC sono le distanze tra A e B; tra B e C:

$\overline{AB} = |x_A - \ldots\ldots| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{BC} = |y_B - \ldots\ldots| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Calcola il perimetro e l'area di $ABCD$:

$2p_{(ABCD)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_{(ABCD)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ [8,6 u; 24 u; 35 u^2]

19. Considera il triangolo isoscele *ABC* di vertici *A* (– 4;– 4); *B* (2;– 4); *C* (– 1;3); rappresentalo nel piano cartesiano, calcola la misura dell'altezza, il perimetro e l'area.

L'altezza *CH* cade nel punto medio della base *AB*; determina le coordinate di *H* punto medio della base:

$x_H = \frac{x_A + x_B}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y_H = \frac{y_A + y_B}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

quindi *H* (– 1;.....)

Calcola la misura dell'altezza *CH*, della base *AB* e del lato obliquo *AC*:

$\overline{CH} = |y_C - \ldots\ldots\ldots| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{AB} = |x_A - \ldots\ldots\ldots| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{AC} = \sqrt{(\ldots\ldots - x_C)^2 + (y_A - \ldots\ldots\ldots)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

.....

Calcola ora perimetro e area:

$2p_{(ABC)} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_{(ABC)} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ [...; 21,2 *u*; 21 u^2]

20. Rappresenta nel piano cartesiano i punti *A* (– 3;– 1); *B* (6;– 1); *C* (2;5) che sono i vertici di un trapezio rettangolo; determina poi le coordinate del quarto vertice, la misura della diagonale *AC*, quella del perimetro e l'area.

Il quarto vertice del trapezio rettangolo è *D* (.....;.....)
calcola le misure dei lati e della diagonale *AC*:

$\overline{AB} = |x_A - x_B| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{AD} = |y_A - y_D| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{DC} = |x_C - x_D| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{CB} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{AC} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ricava dal grafico le coordinate del punto *H*, piede dell'altezza, e calcola la distanza tra *C* e *H*:

H (.....;.....); $\overline{CH} = |y_H - y_C| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Calcola ora perimetro e area del trapezio:

$2p_{(ABCD)} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_{(ABCD)} = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{CH}}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Rappresenta i poligoni di cui sono fornite le coordinate dei vertici; descrivili e calcolane poi perimetro e area.

21. *A* (2;– 4); *B* (5;0);
C (2;4); *D* (– 1;0) [20 *u*; 24 u^2]

22. *D* (– 5;0); *E* (– 2;– 4);
F (6;2); *G* (3;6) [30 *u*; 50 u^2]

23. Costruisci nel piano cartesiano il diagramma della funzione $y = 5x$. Attribuisci alla variabile *x* i valori indicati nella tabella e calcola i corrispondenti valori della *y*.

x	– 2	– 1	0	+ 1	+ 2
y = 5x					

Disegna sul tuo quaderno un piano cartesiano, scegli come unità di misura il centimetro, riporta su di esso i punti corrispondenti ad ogni coppia ordinata e infine uniscili.

24. Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, attribuendo alla x i valori indicati tra parentesi.

$y = 3x$ $[-1, -2, 0, +1, +2]$

$y = -4x$ $[-1, -2, 0, +1, +2]$

$y = \frac{2}{3}x$ $[-6, -3, 0, +3, +6]$

Completa le seguenti tabelle in modo che le due variabili x e y risultino direttamente proporzionali (ricorda che il rapporto $\frac{y}{x}$ deve essere costante)

25.

x	5		2		12
y	10	8		4	

x	6	9		15	
y	2		4		7

26.

x	1	5		– 7	
y	3		– 9		12

x	– 1	– 3	0		
y	– 3			– 12	– 6

27. Quali tra i seguenti punti appartengono alla retta $y = 2x + 1$?

A (2;5) ~~SÌ~~ NO $5 = 2 \cdot 2 + 1 \rightarrow 5 = 5$

B (3;2) SÌ NO .....

C (4;– 1) SÌ NO .....

D (– 1;– 1) SÌ NO .....

E (0;1) SÌ NO .....

28. Quali delle seguenti coppie di rette sono parallele? (*Ricorda che due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare*)

$y = 3x - 1$ e $y = -3x + 2$ SÌ ~~NO~~

$y = -\frac{1}{2}x - 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 3$ SÌ NO

$y = \frac{3}{2}x - 4$ e $y = \frac{3}{2}x - 1$ SÌ NO

$y = \frac{3}{5}x + 1$ e $y = \frac{5}{3}x - 1$ SÌ NO

29. Quali delle seguenti coppie di rette sono perpendicolari? (*Ricorda che due rette sono perpendicolari quando il coefficiente di una è l'opposto dell'inverso del coefficiente dell'altra*)

$y = -2x + 3$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$ ~~SÌ~~ NO

$y = -\frac{3}{2}x + 1$ e $y = +\frac{2}{3}x - 2$ SÌ NO

$y = 4x$ e $y = -4x + 1$ SÌ NO

$y = -\frac{1}{5}x + 1$ e $y = 5x$ SÌ NO

30. Data l'equazione $y = 2x - 4$ determina algebricamente le coordinate dei punti d'intersezione con gli assi cartesiani.

Per stabilire le coordinate del punto d'intersezione A con l'asse delle ascisse si pone $y = 0$ (equazione dell'asse delle ascisse) e si sostituisce tale valore nell'equazione data:

$0 = 2x - 4 \rightarrow x =$ .....; quindi A (.....;0).

Per stabilire le coordinate del punto d'intersezione B con l'asse delle ordinate si pone $x = 0$ (equazione dell'asse delle .....) e si sostituisce tale valore nell'equazione data:

$y =$ .....; quindi B (0;.....).

Verifica graficamente, sul quaderno, i risultati ottenuti.

31. Determina algebricamente e verifica graficamente le coordinate dei punti d'intersezione delle seguenti rette con gli assi cartesiani.

$y = 3x + 6$; $y = -\frac{1}{2}x + 1$; $y = \frac{2}{3}x + 4$

32. Determina algebricamente le coordinate dei punti d'intersezione delle seguenti coppie di rette.

a) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 1 = 2x + 4 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = ... \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = ... \\ y = ... \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} ..... \\ ..... \end{cases}$ $\begin{cases} ..... \\ ..... \end{cases}$ $\begin{cases} x = ... \\ y = ... \end{cases}$

33. Completa le tabelle in modo che le due variabili x e y risultino inversamente proporzionali. (*Ricorda che due grandezze sono inversamente proporzionali quando $x \cdot y$ è costante*)

x	1	2		3				8	
y	24		6		1	3	4		2

x		4	6		36	9	3	12	18
y	6	9		18					

34. Data la funzione $y = \frac{12}{x}$ per rappresentarla graficamente attribuisci alla x dei valori numerici opportuni (in questo caso i divisori di 12) e calcola i corrispondenti valori della y.

x	1	2	3		4	6	12		
y	12			3				4	6

Scegli come unità di misura 0,5 centimetri e riporta sulla carta millimetrata i punti corrispondenti ad ogni coppia ordinata. Quale tipo di diagramma si ottiene?

35. Disegna i diagrammi delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa, attribuendo alla x i valori assegnati.

a) $y = \frac{30}{x}$ [– 30, – 15, – 10, – 6, – 5, – 3, – 2, – 1, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30]

c) $y = \frac{18}{x}$ [– 18, – 9, – 6, – 3, – 2, – 1, 1, 2, 3, 6, 9, 18]

36. Data la funzione $y = -2x^2$ per rappresentarla graficamente attribuisci alla x dei valori numerici opportuni, oltre a zero ad esempio – 1 e + 1, – 2 e + 2, – 3 e + 3, e calcola i corrispondenti valori della y:

x	–3	–2	–1	0	+1	+2	+3
$y = -2x^2$	$-2 \cdot 9 = -18$						

Scegli come unità di misura 0,5 centimetri e riporta sulla carta millimetrata i punti corrispondenti ad ogni coppia ordinata. Quale tipo di diagramma si ottiene?

37. Rappresenta graficamente le seguenti funzioni:

$y = 4x^2$; $y = -\frac{1}{2}x^2$; $y = 5x^2$

POTENZIAMENTO

Equazione di una retta passante per due punti

Scrivi l'equazione di ciascuna delle rette passanti per le seguenti coppie di punti.

ESEMPIO

$A\,(3;5)$ e $B\,(-2;-5)$

La formula è:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

dove con x_1; y_1 e x_2; y_2 si indicano le coordinate dei punti; quindi applicando la formula:

$$\frac{y-(5)}{-5-(5)} = \frac{x-(3)}{-2-(3)} \qquad \frac{y-5}{-10} = \frac{x-3}{-5}$$

riduciamo allo stesso denominatore:

$$\frac{y-5}{-\cancel{10}} = \frac{2\cdot(x-3)}{-\cancel{10}} \qquad y - 5 = 2x - 6$$

da cui:

$$y = 2x - 6 + 5$$

quindi, l'equazione è:

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

1. $A\,(-3;4)$ e $B\,(2;5)$ — $A\,(2;0)$ e $B\,(4;2)$

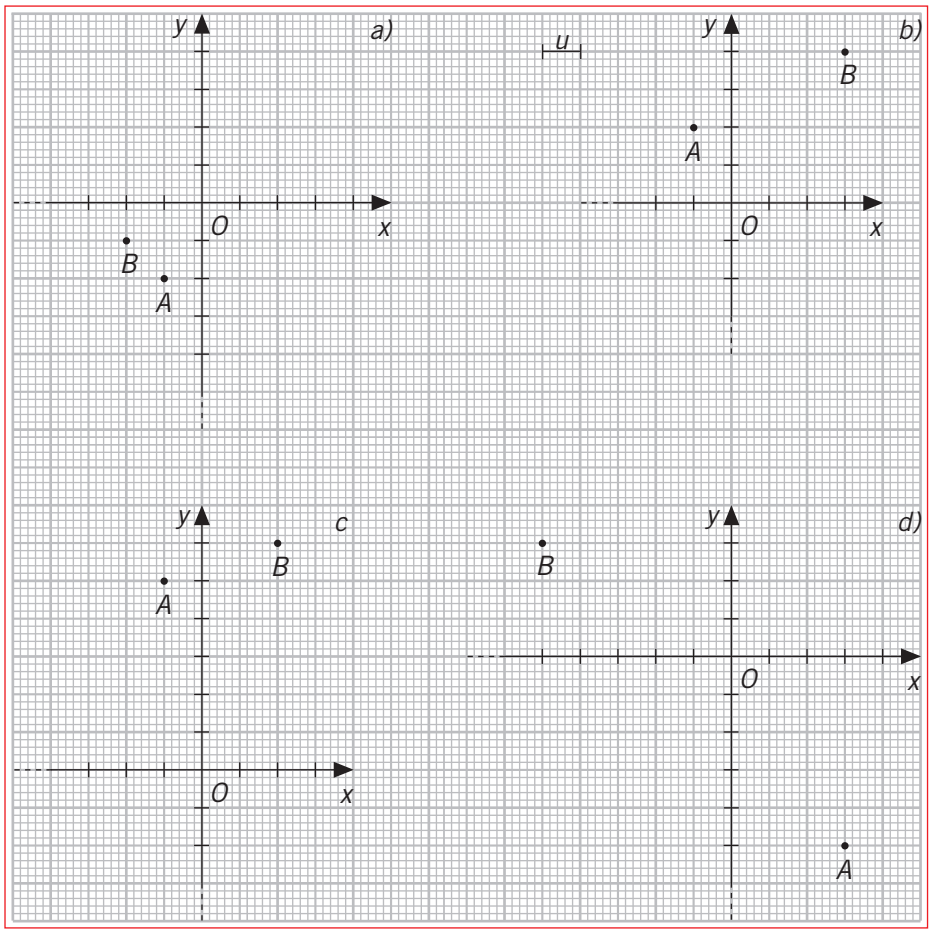
2. $A\,(6;1)$ e $B\,(0;-2)$ — $A\,(1;5)$ e $B\,(4;8)$

3. $A\,(-2;3)$ e $B\,(4;-3)$ — $A\,(-1;-1)$ e $B\,(3;3)$

4. $A\,(-1;-2)$ e $B\,(3;0)$ — $A\,(3;-1)$ e $B\,(-7;4)$

5. $A\,(1;2)$ e $B\,(2;4)$ — $A\,(2;5)$ e $B\,(3;-5)$

6. Determina le coordinate delle coppie di punti rappresentate su ognuno dei piani cartesiani. Ricava poi l'equazione della retta passante per ciascuna coppia di punti.



A (.....;.....)
B (.....;.....)

A (.....;.....)
B (.....;.....)

A (.....;.....)
B (.....;.....)

A (.....;.....)
B (.....;.....)

Risoluzione grafica di un'equazione di primo grado

Utilizzando il procedimento dell'esempio, risolvi algebricamente e graficamente le seguenti equazioni.

ESEMPIO

- **Risoluzione algebrica**

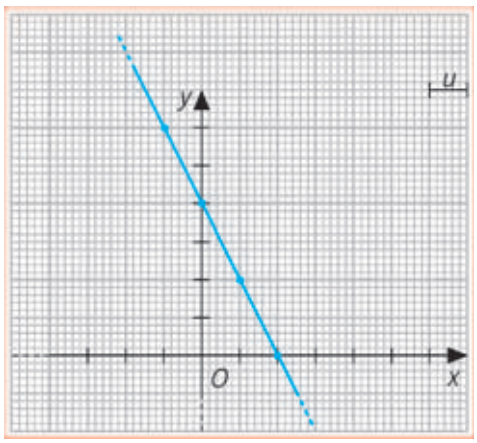
$-2x+4=0 \qquad -2x=-4 \qquad x=\frac{-4}{-2}=2$

- **Risoluzione grafica**

L'equazione della retta è $y=-2x+4$

La radice dell'equazione è l'ascissa del punto d'incontro tra la retta e l'asse delle x.

x	-1	0	$+1$	$+2$
$y=-2x+4$	$+6$	$+4$	$+2$	0



7. $-x+2=0$ $\quad 4x-2=0$ $\quad \frac{9}{2}x+6=0$

8. $x-2=0$ $\quad x+7=0$ $\quad \frac{2}{3}x-1=0$

9. $x+2=0$ $\quad -2x+\frac{1}{2}=0$ $\quad \frac{1}{5}x+1=0$

Risolvi graficamente le seguenti equazioni, considerando i due membri come equazioni di due rette distinte. Verifica poi algebricamente l'esattezza della radice trovata.

Ricorda: *il valore dell'incognita dell'equazione è dato dall'ascissa del punto di intersezione tra le due rette che hanno come equazioni i due membri. Ad esempio, per la prima equazione dell'esercizio 10,* $y=x+3$ *e* $y'=2x-1$ *sono le rette che hanno come equazioni i due membri.*

10. $x+3=2x-1$ $\quad 2x+7=-3x+8$

11. $x-4=3x-18$ $\quad 9-7x=15+5x$ $\quad 3x-7=7x-9$

12. $7x-5=5x-9$ $\quad 3x-4=5x+6$ $\quad 10-4x=25+x$

13. $8x-17=2x-2$ $\quad 3x-10=13+2x$ $\quad 3x+2=x+16$

Funzioni e piano cartesiano

14. Scrivi l'equazione di una retta parallela alla retta $y=-2x$ e passante per il punto P (0;– 3).

15. Determina l'equazione della retta con coefficiente angolare $m=\frac{1}{2}$ e passante per il punto P (2;3).

16. Determina l'equazione della retta con coefficiente angolare $m=-2$ che interseca l'asse y nel punto P (0;– 1).

17. Determina l'equazione della retta parallela alla retta $y=-\frac{1}{2}x+2$ e passante per il punto P (0;– 3).

18. Determina l'equazione della retta perpendicolare alla retta $y=-\frac{2}{3}x+1$ e passante per il punto P (0;2).

19. Scrivi l'equazione della retta parallela alla retta $y=-\frac{3}{4}x+3$ e passante per l'origine degli assi cartesiani.

20. Determina graficamente le coordinate dei punti d'intersezione delle seguenti coppie di funzioni:

a) $y=\frac{27}{x}$ e $y=3x$ [(3;9), (– 3;– 9)]

b) $y=5x^2$ e $y=5x$ [(0;0), (1;5)]

c) $y=4x^2$ e $y=-8x$ [(0;0), (– 2;16)]

21. Utilizzando il cm come unità di misura, rappresenta sul piano cartesiano le seguenti rette:

$r)\ =-x+7 \quad s)\ y=x-3$

a) Come sono le due rette? Motiva la risposta.

b) Indica con P il punto d'intersezione delle due rette e determina graficamente e algebricamente le sue coordinate.

c) Indica con A e con B rispettivamente i punti d'intersezione delle rette r ed s con l'asse delle ascisse (x) e determina graficamente e algebricamente le loro coordinate.

d) Descrivi il triangolo APB.

e) Calcola l'area e la misura del perimetro del triangolo APB (approssimando i risultati ai centesimi).

[(5;2); 9,65u; 4u^2]

22. In un sistema di riferimento cartesiano assumi il cm come unità di misura e rappresenta i seguenti punti:
A (– 4;– 1) B (4;– 1) C (1;3) D (– 4;3).

a) Descrivi il poligono $ABCD$.

b) Calcola la lunghezza del perimetro e l'area di $ABCD$.

c) Considera il solido ottenuto dalla rotazione del quadrilatero attorno al lato AB.

d) Calcola l'area totale del solido ottenuto.

e) Calcola il volume di detto solido.

f) Dopo aver scritto la formula che lega il peso di un corpo al suo volume, calcola il peso in grammi del solido precedente, supponendo che sia di vetro ($ps = 2{,}5$).
Le grandezze peso e volume sono direttamente o inversamente proporzionali? Giustifica la risposta.
[22 cm; 26 cm^2; 76π cm^2; 96π cm^3; 753,6 g]

23. Rappresenta in un piano cartesiano le rette di equazioni $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x - 3$ e determina graficamente e algebricamente le coordinate del loro punto di intersezione P. Nello stesso grafico traccia le rette passanti per il punto P e parallele agli assi cartesiani; scrivi quindi le loro equazioni.

24. a) Traccia in un riferimento cartesiano le seguenti rette:

1) $y = -\frac{2}{3}x + 4$ 2) $y = -2x + 8$

determina graficamente e algebricamente le coordinate del punto A in cui la prima retta incontra l'asse x e del punto C in cui la seconda retta incontra l'asse y.

b) Trova graficamente e algebricamente le coordinate del punto B di intersezione delle due rette.

c) Calcola l'area del triangolo OAB, del triangolo OBC e del quadrilatero $OABC$.
[A (6;0); C (0;8); B (3;2); $6u^2$; $12u^2$; $18u^2$]

25. In uno stesso riferimento cartesiano rappresenta le rette di equazione:

$y = 2x$ $y' = 2x + 4$ $y'' = 2x - 3$.

a) Quali quadranti attraversa la prima retta?

b) Da che cosa potevi prevederlo?

c) Come risultano le tre rette tra di loro?

d) Potevi prevederlo senza ricorrere alla rappresentazione grafica?

e) Perché?

f) Scrivi l'equazione della retta perpendicolare alla prima.

g) Spiega come procedi per trovare l'equazione della retta perpendicolare alla retta data.

26. Riporta su un piano cartesiano ortogonale le rette r, s, t di equazione:

r) $y = 1$ s) $x = 2$ t) $y = -x + 8$.

a) Le tre rette intersecandosi delimitano una figura: quale?

b) Descrivi tale figura rispetto agli angoli e ai lati.

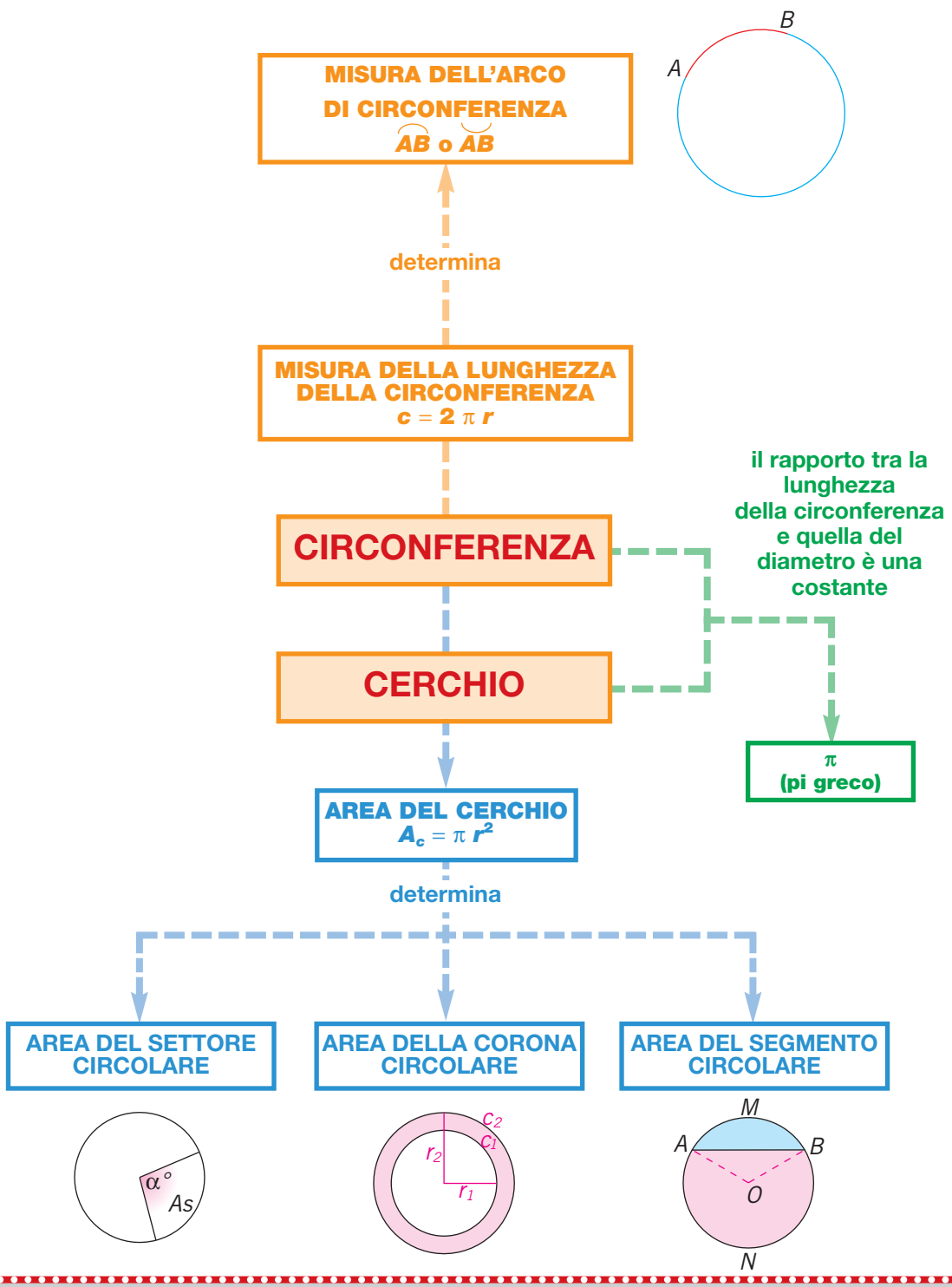
c) Determina graficamente e algebricamente le coordinate dei punti:

A, intersezione delle rette r e s,
B, intersezione delle rette r e t,
C, intersezione delle rette s e t.

d) Considerando il cm come unità di misura, calcola l'area e il perimetro della figura piana considerata nel punto a).
[A (2;1); B (7;1); C (2;6); ...]

5 Le misure di cerchio, circonferenza e loro parti

ESERCIZI E ATTIVITÀ PER IL RECUPERO E PER IL POTENZIAMENTO



RECUPERO

Prima di effettuare gli esercizi per il recupero è opportuno che tu riveda la teoria sul libro di testo.

1. Scrivi le formule per calcolare la lunghezza di una circonferenza, l'area di un cerchio e le relative formule inverse:

$c =$ ..... da cui $r =$ .....

$A_c =$ ..... da cui $r =$ .....

2. Completa la seguente tabella relativa alla lunghezza di alcune circonferenze (procedi come nell'esempio, lasciando indicato π):

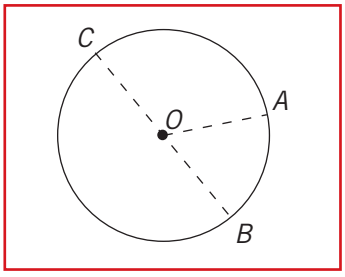
Raggio (cm)	Circonferenza	Calcoli
21		$c = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 21 \cdot \pi = 42\pi$
	54π	$r = \frac{c}{2\pi} = \frac{54\pi}{2\pi} =$ .....
3,8		
	100π	
	$66{,}4\pi$	
0,63		
0,5		
1,5		

3. Completa la seguente tabella relativa a dei cerchi (procedi come nell'esempio, lasciando indicato π):

Raggio (cm)	Cerchio	Calcoli
17		$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 17^2 = 289\pi$
	625π	$r = \sqrt{\frac{A_c}{\pi}} = \sqrt{\frac{625\pi}{\pi}} =$ .....
2,4		
	$21{,}16\pi$	
	$51{,}84\pi$	
	$449{,}44\pi$	
6,1		
3,2		

Risolvi i seguenti problemi seguendo le indicazioni.

4. Un cerchio ha l'area di 324π m^2; calcola la misura del raggio, quella del diametro e quella della circonferenza.



$A_c = 324\pi$ m^2

$\overline{OA} = ?$

$\overline{CB} = ?$

$c = ?$

Per calcolare la misura del raggio applica la formula inversa dell'area del cerchio:

$\overline{OA} = r = \sqrt{\frac{A_c}{\pi}} =$ .....

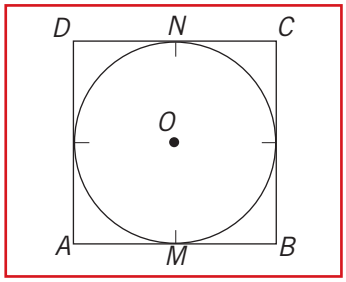
calcola ora la misura del diametro:

$\overline{BC} =$ .....

calcola ora la circonferenza:

$c = 2 \cdot \pi \cdot r =$ .....

5. Considera un quadrato circoscritto a un cerchio di raggio 6,5 dm. Calcola l'area del cerchio, il perimetro e l'area del quadrato. Completa il disegno, i dati e le richieste:



$\overline{OM} =$ .....

$A_c = ?$

$A_{(ABCD)} = ?$

$2p_{(ABCD)} = ?$

Applica la formula per calcolare l'area del cerchio:

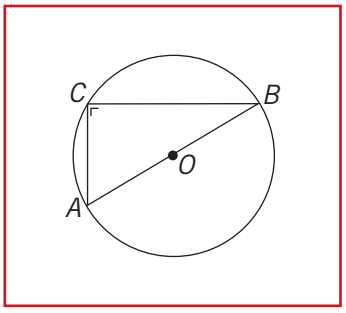
$A_c = \pi \cdot r^2 =$ .....

traccia il diametro MN e osserva che è congruente al lato del quadrato; quindi:

$A_{(ABCD)} = \ell^2 =$ .....

$2p_{(ABCD)} = \ell \cdot 4 =$ .....

6. Un triangolo rettangolo avente il cateto maggiore di 15 dm è inscritto in una circonferenza di raggio 8,5 dm. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.



$\overline{CB} = 15$ dm
$\overline{AO} = \overline{OB} = 8{,}5$ dm

$2p_{(ABC)} = ?$
$A_{(ABC)} = ?$

Essendo rettangolo il triangolo inscritto nella circonferenza, necessariamente si ha che il diametro *AB* e l'ipotenusa del triangolo coincidono; quindi:

$\overline{AB} = \overline{AO} \cdot 2 =$ .....

per calcolare la misura del cateto minore *AC* si applica il teorema di Pitagora:

$\overline{AC} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots} =$ .....

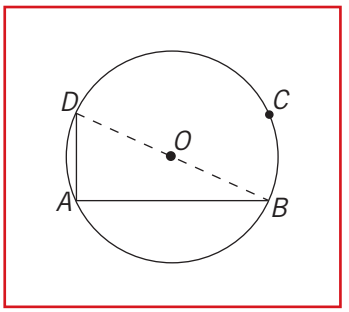
.....

calcola, ora, il perimetro e l'area del triangolo *ABC*:

$2p =$ .....

$A =$ .....

7. Un rettangolo inscritto in una circonferenza ha il perimetro di 204 m e una dimensione di 72 m. Calcola l'area del rettangolo, la circonferenza e l'area del cerchio.
Completa il disegno, i dati e le richieste:



$2p_{(ABCD)} =$ .....
$\overline{AB} =$ .....

$A_{(ABCD)} =$ .....
$c =$ .....
$A_c =$ .....

Con la formula inversa del perimetro calcola l'altra dimensione del rettangolo *ABCD* e quindi l'area:

$\overline{DA} = 2p : 2 - \overline{AB} =$ .....

$A_{(ABCD)} = \overline{AB} \cdot \overline{DA} =$ .....

osserva che il diametro *DB* coincide con la diagonale del rettangolo; quindi:

$\overline{DB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{DA}^2} =$ .....

.....

$\overline{DO} = \overline{DB}$: .....

$c =$ .....

$A_c =$ .....

Risolvi i seguenti problemi (*sono importanti un disegno preciso, i dati e le richieste*).

8. Una circonferenza misura $99{,}6\pi$ dm; calcola la misura del raggio, quella del diametro e l'area del cerchio.
[49,8 dm; 99,6 dm; $2480{,}04\pi$ dm^2]

9. Un cerchio ha l'area di 144π dm^2; calcola la misura del raggio, quella del diametro e quella della circonferenza.
[12 dm; 24 dm; 24π dm]

10. Un campo circolare avente il raggio di 10 m viene recintato con una rete metallica che costa 5,60 € al metro. Calcola la spesa.
[351,68 €]

11. Un quadrato è circoscritto ad un cerchio avente l'area di $33{,}64\pi$ cm^2; calcola il perimetro e l'area del quadrato (*vedi esercizio 5*).
[46,4 cm; 134,56 cm^2]

12. Un quadrato è circoscritto ad una circonferenza lunga 56π cm; calcola la misura del raggio, il perimetro e l'area del quadrato (*vedi esercizio 5*).
[28 cm; 224 cm; 3136 cm^2]

13. Un triangolo rettangolo inscritto in un cerchio ha i cateti che misurano rispettivamente 39 cm e 52 cm. Calcola la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio circoscritto al triangolo (*vedi esercizio 6*).
[65π cm; $1056{,}25\pi$ cm^2]

14. Un triangolo rettangolo inscritto in un cerchio ha l'ipotenusa e un cateto che misurano rispettivamente 20 cm e 12 cm. Calcola la misura della circonferenza e l'area del cerchio circoscritto; calcola poi l'area e il perimetro del triangolo (*vedi esercizio 6*).
[20π cm; 100π cm; 96 cm^2; 48 cm]

15. Un rettangolo avente le dimensioni di 45 dm e 24 dm è inscritto in una circonferenza; calcola il raggio, la circonferenza e l'area del cerchio (*vedi esercizio 7*).
[25,5 dm; 51π dm; $650{,}25\pi$ dm^2]

16. Un rettangolo avente l'area di 192 m^2 e la base di 16 m è inscritto in un cerchio. Calcola l'area del cerchio e il perimetro del rettangolo (*vedi esercizio 7*).
[100π m^2; 56 m]

POTENZIAMENTO

1. Un settore circolare appartiene ad un cerchio avente l'area di 25π dm^2 ed è delimitato da un arco lungo $1{,}875\pi$ dm. Determina:
1) l'area e l'ampiezza del settore;
2) l'area di un pentagono *ABCDE* inscritto in un cerchio uguale al precedente e scomponibile per mezzo della diagonale *AC* nel quadrato *ACDE* e nel triangolo isoscele ABC.

[$4{,}6875\pi$ dm^2; 67°30'; 55,18 dm^2 per ecc.]

2. Disegna un rettangolo che abbia la base uguale ai $\frac{12}{5}$ dell'altezza e costruisci la circonferenza ad esso circoscritta. Ammesso che il rettangolo abbia il perimetro di 136 dm, determina:
1) le misure del diametro della circonferenza e della distanza del centro da ciascuno dei lati maggiori del rettangolo;
2) le misure del lato e dell'apotema (approssimata al cm) dell'esagono regolare inscritto nella circonferenza;
3) l'area del trapezio isoscele inscritto nella circonferenza, avente le basi situate da parti opposte rispetto al centro ed uguali rispettivamente al lato maggiore del rettangolo ed al lato dell'esagono.

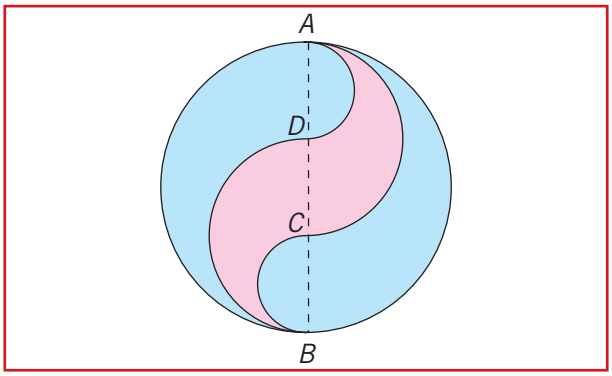
[52 dm; 10 dm; 26 dm; 22,5 dm; 1202,50 dm^2]

3. In una circonferenza di 100π cm è inscritto un trapezio isoscele con le basi che sono situate dalla stessa parte rispetto al centro e che distano da esso 48 cm e 40 cm. Determina:
1) l'area del trapezio;
2) l'ampiezza e il perimetro di un settore, appartenente allo stesso cerchio ed avente l'area di $337{,}5\pi$ cm^2.

[352 cm^2; 48°36'; 142,39 cm]

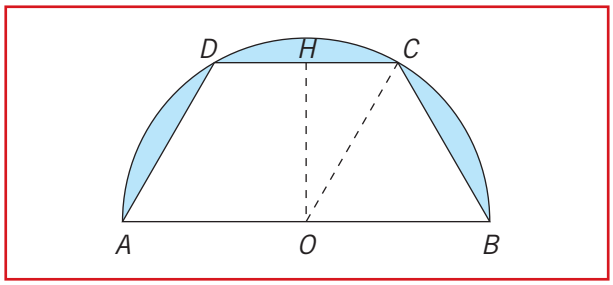
4. Osserva la figura: sapendo che i segmenti *AD*, *CD* e *BC* sono congruenti e che *AB* misura 18 cm, calcola l'area di ciascuna delle due parti colorate e il loro rapporto.

[54π cm^2; 27π cm^2; $\frac{1}{2}$]



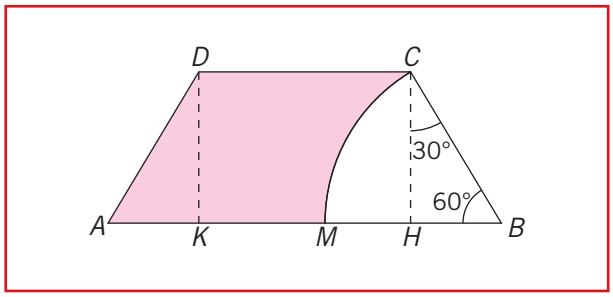
5. In una semicirconferenza avente l'area di 1250π cm^2 è inscritto un trapezio isoscele che ha la base maggiore coincidente con il diametro *AB* e l'altezza *OH* lunga 30 cm. Calcola il perimetro del trapezio *ABCD* e l'area della parte colorata.

[243,245 cm; 1225 cm^2]



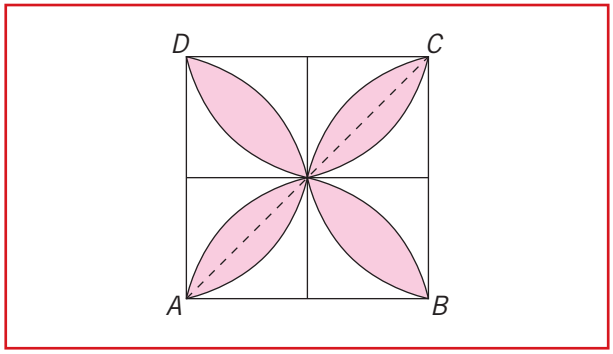
6. In un trapezio isoscele *ABCD* ciascuno dei due angoli adiacenti alla base maggiore *AB* misura 60°, il perimetro e la base minore misurano rispettivamente 76 cm e 20 cm. Puntando con il compasso nel vertice *B* con un'apertura lunga quanto il lato obliquo *BC* si traccia un arco fino ad intersecare nel punto *M* la base maggiore *AB*. Calcola la lunghezza del contorno e l'area del quadrilatero mistilineo *AMCD*.

[64,56 cm; 194,78 cm^2]



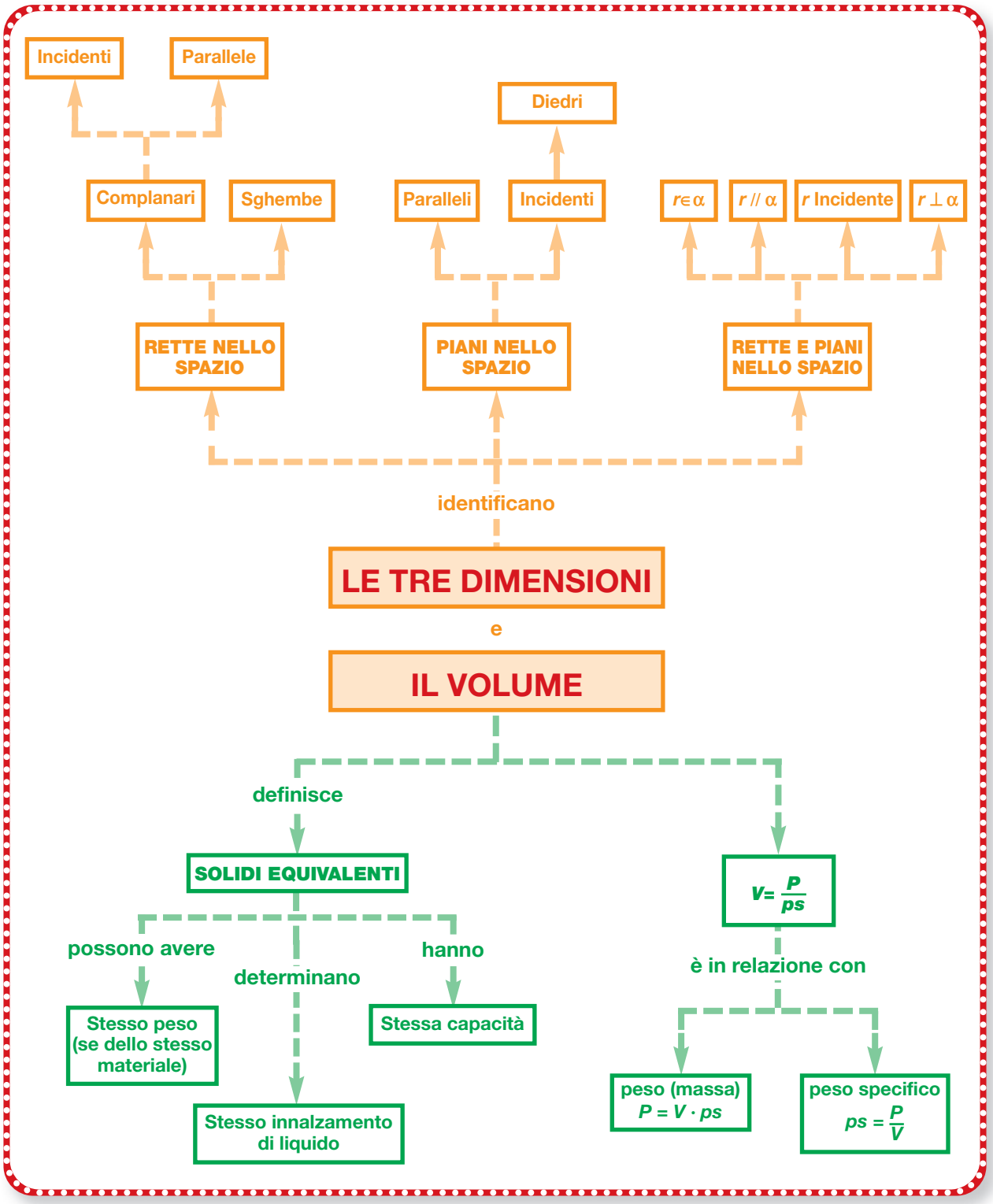
7. Osserva la figura: calcola l'area della parte colorata sapendo che la diagonale del quadrato *ABCD* misura $20 \cdot \sqrt{2}$ cm.

[228 cm^2]



6 Le tre dimensioni, il volume e il peso specifico

ESERCIZI E ATTIVITÀ PER IL RECUPERO E PER IL POTENZIAMENTO



RECUPERO

Prima di effettuare gli esercizi per il recupero
è opportuno che tu riveda la teoria sul libro di testo.

1. Completa le seguenti affermazioni.

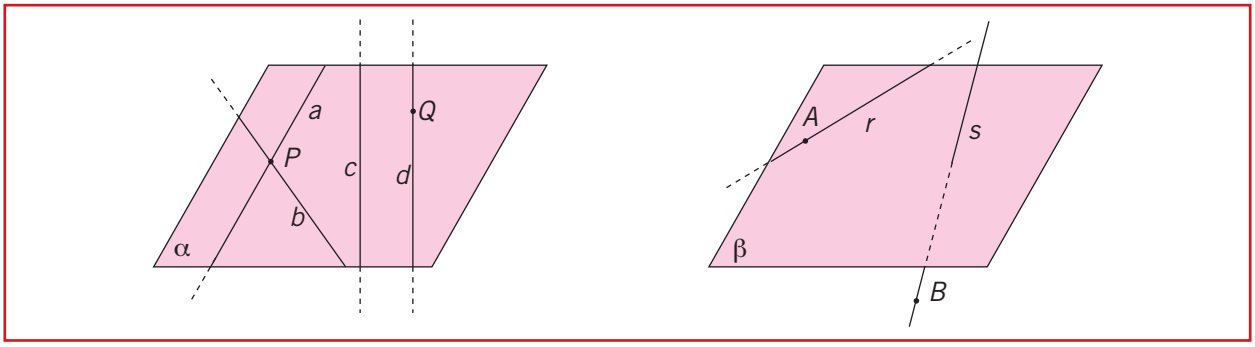
a) Due rette si dicono complanari quando .....

b) Due rette complanari possono essere .....

c) Due rette che non appartengono allo stesso piano sono dette .....

d) Due rette sghembe non hanno ..... e non sono .....

Osserva le seguenti figure e distingui le affermazioni vere da quelle false.



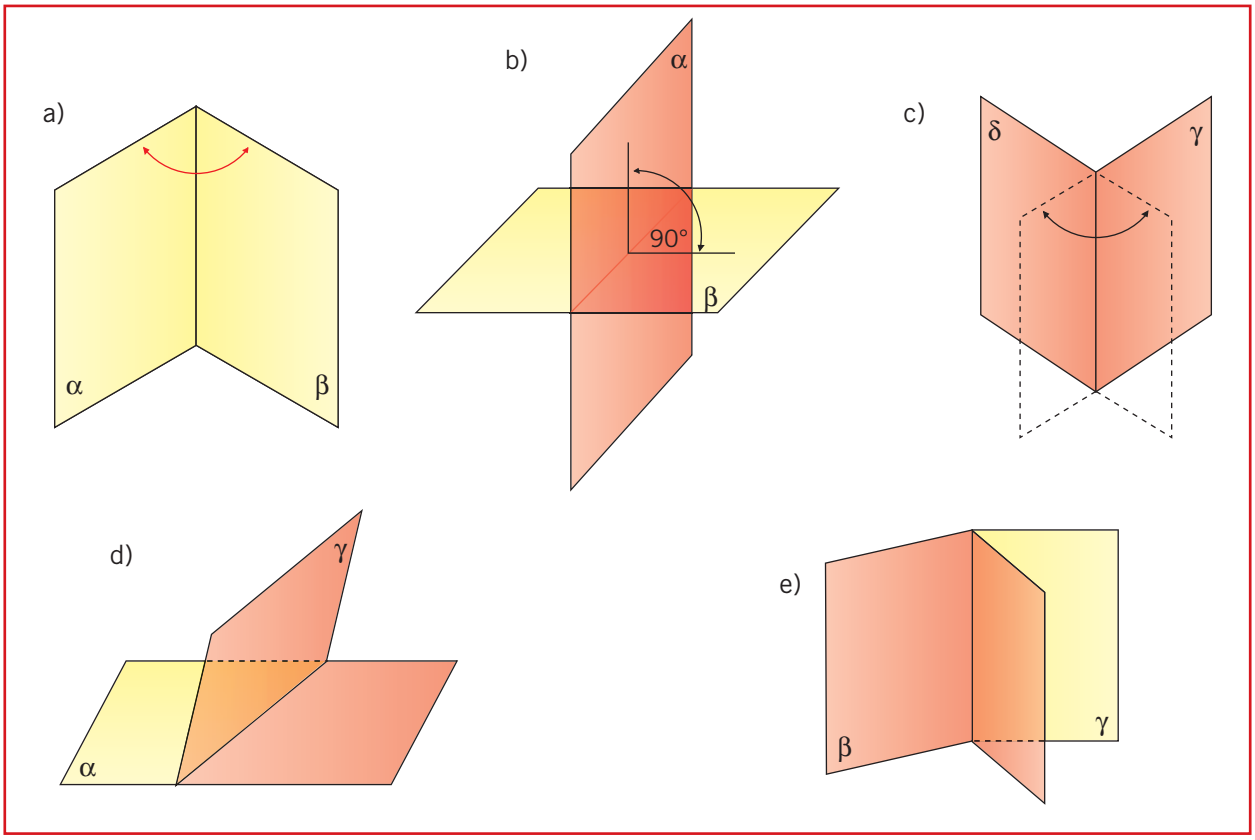
2

$a \in \alpha$	V	F	$c \notin \alpha$	V	F	$d \in \beta$	V	F
$A \in s$	V	F	$r // s$	V	F	$P \in a$	V	F
$r \in \beta$	V	F	$s \notin \beta$	V	F	$a \cap b = P$	V	F
$c \cap d = \varnothing$	V	F	$r \cap s = A$	V	F	$r \cap s = \varnothing$	V	F

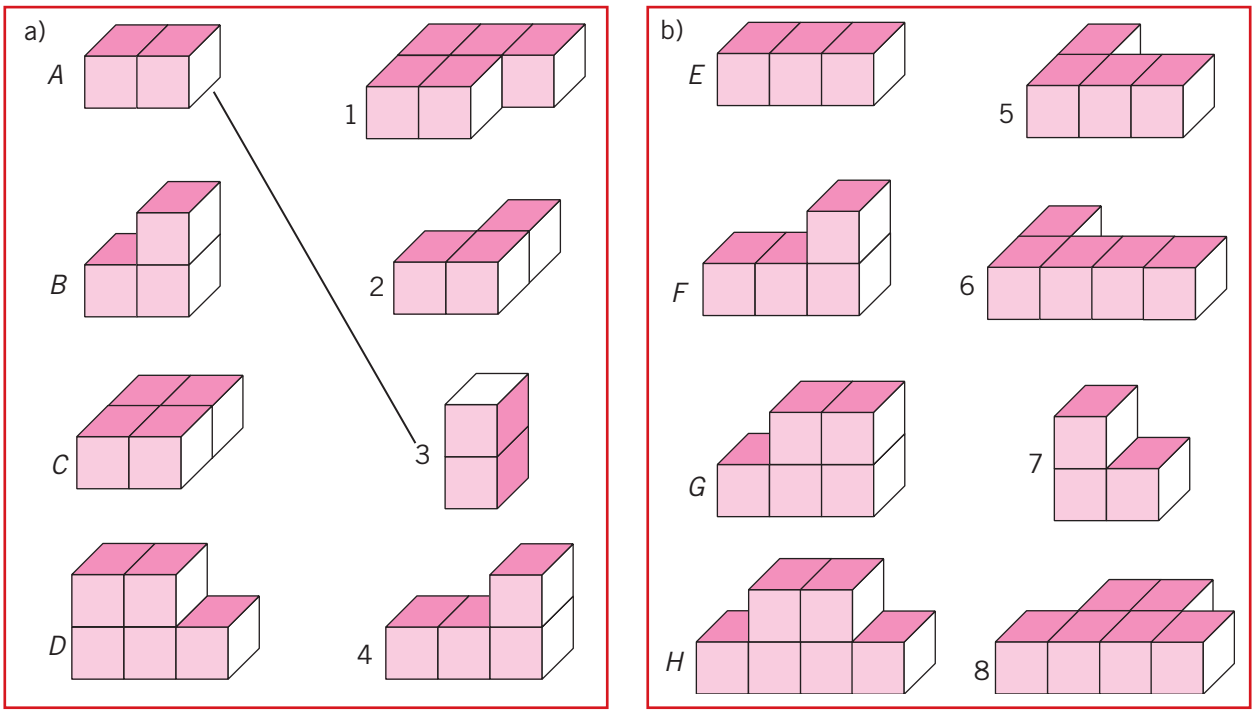
3.

Le rette *a* e *b* sono complanari	V	F
Le rette *c* e *d* non hanno punti in comune	V	F
Le rette *c* e *d* sono complanari sghembe	V	F
Le rette c e *d* sono complanari parallele	V	F
Le rette *a* e *b* sono incidenti	V	F
Le rette *r* e *s* giacciono sul piano β	V	F
Le rette *r* e *s* sono sghembe	V	F
Le rette *r* e *s* sono complanari	V	F
Le rette a e *b* hanno un punto in comune	V	F
Le rette *r* e *s* hanno il punto *A* in comune	V	F

4. Assegna alle seguenti illustrazioni il nome esatto scegliendolo tra quelli proposti (attenzione non tutti i nomi andranno utilizzati): diedro retto, diedri consecutivi, diedro convesso, diedro piatto, diedro concavo, diedri adiacenti, diedri composti, diedri complementari.



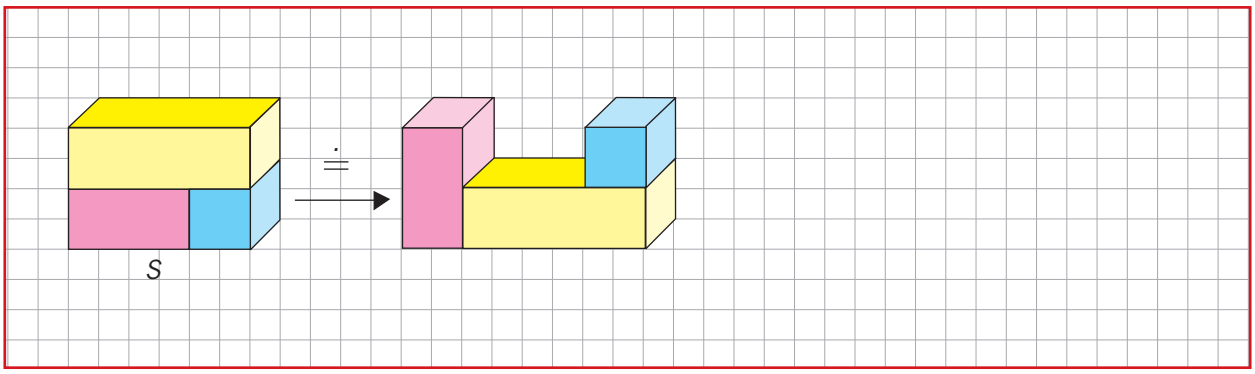
5. Unisci con un linea i solidi equivalenti, cioè che hanno lo stesso volume perché sono formati dallo stesso numero di cubetti. Completa poi le relazioni di equivalenza.



a) $A \doteq 3$; .....

b) .....

6. Considera il solido *S* dell'illustrazione e disegnane altri tre equivalenti ad esso, cioè formati dalle stesse parti; procedi come nell'esempio.



7. Completa la seguente tabella relativa alle **misure di volume**.

.....	.....	.....	m^3	.....	.....	.....

sottomultipli multipli

8. Completa la seguente tabella relativa alle **misure di massa (peso)**.

.....	.....	.....	g	.....	.....	kg	(Miria-grammo)	(q)	Mg (t)

sottomultipli multipli

9. Completa la seguente tabella relativa alle **misure di capacità**.

.....	.....	.....	ℓ	.....	.....

sottomultipli multipli

10. Completa le seguenti equivalenze seguendo le indicazioni.

a) 7836 m^3 = ... dam^3; per passare dai metri cubi ai decametri cubi devi dividere per 1000; quindi 7836 : 1000 = ...

b) 24,5 dm^3 = ... cm^3; per passare dai decimetri cubi ai centrimetri cubi devi moltiplicare per 1000; quindi 24,5 x 1000 = ...

c) 0,7 m^3 = ... cm^3; per passare dai metri cubi ai centimetri cubi devi moltiplicare per 1000000; quindi 0,7 x 1000000 = ...

11. Completa le seguenti equivalenze.

a) 3 dm^3 = ... cm^3

2,75 m^3 = ... cm^3

0,008 cm^3 = ... mm^3

30,45 dm^3 = ... m^3

7830 cm^3 = ... dm^3

b) 1700 dm^3 = ... m^3

3824 cm^3 = ... dm^3

80 mm^3 = ... cm^3

34680 cm^3 = ... dm^3

0,7 dm^3 = ... m^3

c) 18 Mg = 18 · 1000 = ... kg
20 g = ... hg
38 hg = ... kg
47 q = ... kg
53 kg = ... q

d) 27 g = ... mg
36 mg = ... g
18 dg = ... g
423 q = ... t
358 t = ... q

e) 3 ℓ = 13 · 1000 = ... ml
5 cl = ... dl
0,5 ℓ = ... cl
1500 ml = ... ℓ

f) 374 cl = ... ℓ
2,85 ℓ = ... dl
8,64 dl = ... ℓ
3000 ml = ... ℓ

12. Osserva la tabella che mette in corrispondenza le **unità di misura di volume con quelle di peso** e completa le frasi seguenti.

Volume	Peso
cm^3	g
dm^3	kg
m^3	Mg

Se il volume di un solido si misura in cm^3, il suo peso sarà in .....
Se il volume di un solido si misura in ....., il suo peso sarà espresso in kg.
Se il volume di un solido si misura in m^3, il suo .....

Se le unità di misura utilizzate in un problema per esprimere il peso oppure il volume **non sono quelle riportate nella tabella, vanno effettuate le necessarie trasformazioni.**

13. Completa scrivendo le formule richieste:

ps = ... $P = ps \cdot V$ V = ...

14. Completa la tabella utilizzando le formule sopra riportate e rispettando le corrispondenze tra le unità di misura. (Procedi come negli esempi).

Peso specifico (*ps*)	Peso	Volume (*V*)	Calcoli
2,5	.....g	15 cm^3	$P = 2,5 \cdot 15 = 37,5$ g
0,5	1,25 kg		$V = 1,25 : 0,5 = 2,5$ .....
	16,8 g	4,8 cm^3	$ps = 16,8 : 4,8 =$ .....
vetro (*ps* 2,5)		26 cm^3	
ghiaccio (*ps* 0,92)	23 kg		
ottone (*ps* 8,5)		64 cm^3	
zinco (*ps* 6,9)	186,3 kg		
legno di abete (*ps* 0,5)	1320 g		
olio di oliva (*ps* 0,91)	728 g		
	9,345 kg	1,050 cm^3	
rame (*ps* 8,9)		890 cm^3	
avorio (*ps* .....)	130,2 g	70 cm^3	
sughero (*ps* 0,25)		4 m^3	
alluminio (*ps* .....)	13,5 kg	5 dm^3	
legno di castagno (*ps* 0,8)		2 m^3	
stagno (*ps* 7,3)	182,5 g		
marmo (*ps* 2,9)		150 cm^3	

Risolvi i seguenti problemi seguendo le indicazioni.

15. Un oggetto di alluminio (*ps* 2,7) ha il volume di 43 cm^3; qual è il suo peso?
Conosci volume e peso specifico, puoi applicare la formula per determinare il peso:

$P = V \cdot ps =$ .....

Controlla l'unità di misura: il volume è in cm^3 e quindi il peso sarà ..... [116,1 g]

16. Un vassoio di acciaio (*ps* 7,86) pesa 746,7 g; qual è il suo volume?
Conosci il peso specifico e il peso; puoi calcolare il volume:

$V = P$ ..... = ...

controlla l'unità di misura: il peso è in g e quindi il volume sarà ..... [95 cm^3]

17. Una catasta di legno ha un volume di 6500 m^3 e un peso di 3250 Mg (t); di quale tipo di legno si tratta?
Per stabilire il tipo di legno devi calcolare il peso specifico e controllare con quelli della tabella sul libro di testo

$ps = P$ ..... = ... [*ps* 0,5 legno di .....]

18. Un masso ha un peso di 390 hg e un peso specifico di 2,6; calcola il suo volume ed esprimilo in cm^3.
Il peso in hg va trasformato in kg: 390 hg = ... kg
applica la formula per calcolare il volume: .....
il peso è espresso in kg, quindi il volume è in ....., ma il problema chiede il volume in cm^3, quindi devi effettuare una equivalenza: ..... [15000 cm^3]

19. Considera un solido di nichel (*ps* 8,4) avente il volume di 525 cm^3, calcola il suo peso in kg.
Applica la formula per determinare il peso:

$P =$ .....

Il volume è espresso in cm^3, quindi, il peso è in .....; ma il problema chiede il peso in kg;
devi quindi effettuare una equivalenza: .....
[4,41 kg]

POTENZIAMENTO

1. Disegna il piano α e le rette *a*, *b* e *c* considerando le seguenti indicazioni:

$b \in \alpha$; $c \cap \alpha = \{P\}$;

$b \cap c = \emptyset$; $a \cap \alpha = \emptyset$; $a \cap c = \emptyset$.

2. Disegna i piani α e β e le rette *t* ed *s* seguendo le indicazioni:

$\alpha \cap \beta = t$; $s \in \beta$; $s \,//\, t$.

3. α e β sono due piani, *r*, *s* e *t* sono tre rette; completa i seguenti enunciati aperti tenendo conto delle informazioni date:

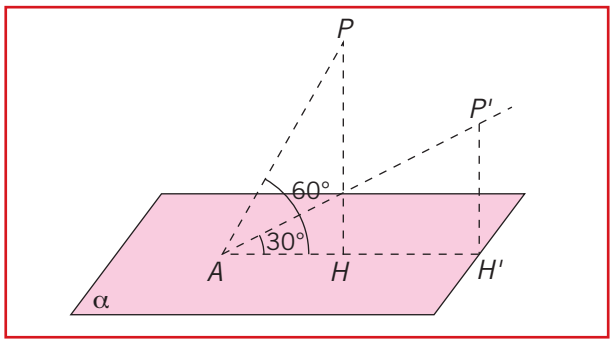
$\alpha \perp \beta$; $\alpha \cap \beta = r$; $t \in \alpha$; $s \in \beta$, $t \cap s = \{A\}$

s ..... *r*; *t* ..... *r*; *t* ..... *s*; $r \cap s =$ .....;

$r \cap t =$ .....; *s* ..... α ; *t* ..... α .

4. a) $PH \perp \alpha$
$P\hat{A}H = 60°$
$\overline{AH} = 28$ cm
$\overline{PH} = ?$
[48,5 cm]

b) $P'H' \perp \alpha$
$P'\hat{A}H' = 30°$
$\overline{AP'} = 46$ cm
$\overline{AH'} = ?$
[23 $\sqrt{3}$ cm]



5. Da un punto P distante 20 cm da un piano α conduci ad esso dei segmenti obliqui che formino col piano angoli di 30°, di 45° e 60°. Calcola le misure delle loro lunghezze e quelle delle loro proiezioni sul piano α.

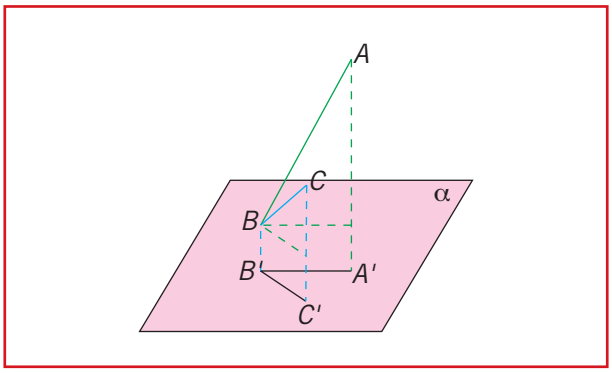
[40 cm; 34,64 cm; 28,28 cm; 20 cm; 23,09 cm; 11,54 cm]

6. Se la retta a è $\perp$ alla retta b e la retta c è $\perp$ alla retta b, a e c possono essere $\perp$ fra loro? Quando accade?

7. Per un punto possono passare tre rette $\perp$ fra loro? Ne possono passare quattro?

8. $A'B'$ e $B'C'$ sono le proiezioni dei segmenti AB e BC sul piano α. Calcola le loro misure sapendo che AB e BC misurano rispettivamente 56 cm e 32 cm e che entrambi sono inclinati di 60° rispetto al piano α.

[28 cm; 16 cm]



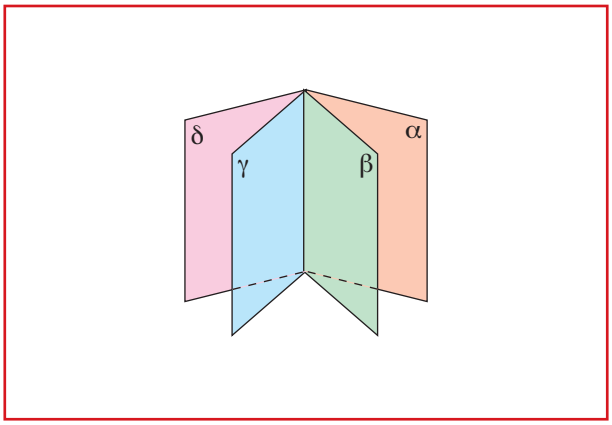
9. Completa i seguenti enunciati aperti riferendoti alla figura (***N.B.*** *Le scritture* $\widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{\beta\gamma}$*.... indicano dei diedri*).

$\widehat{\alpha\beta} \cap \widehat{\beta\delta} =$ ..... $\quad \widehat{\alpha\beta} \cup \widehat{\beta\gamma} =$ .....

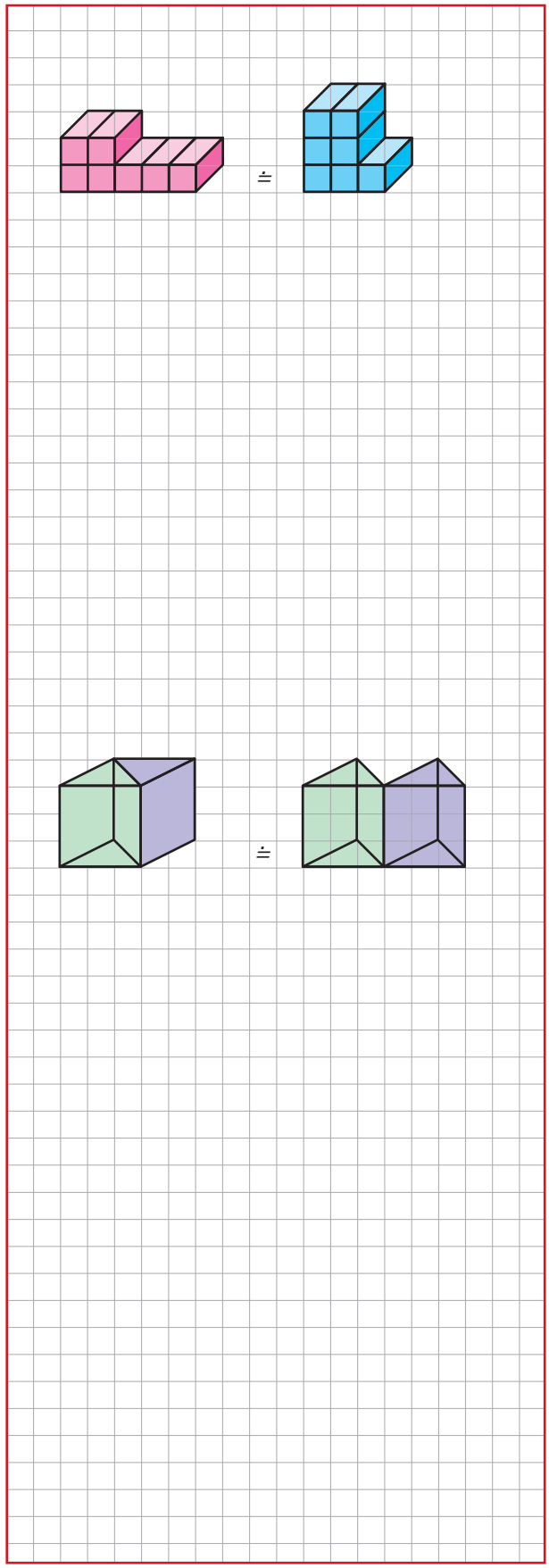
$\widehat{\alpha\beta} \cap \widehat{\gamma\delta} =$ ..... $\quad \widehat{\alpha\gamma} \cup \widehat{\gamma\delta} =$ .....

$\widehat{\alpha\delta} \cap \widehat{\beta\gamma} =$ ..... $\quad \widehat{\beta\gamma} \cup \widehat{\gamma\delta} =$ .....

$\widehat{\gamma\delta} \cap$ ..... $= \varnothing \quad \widehat{\delta\gamma} \cup \widehat{\beta\gamma} \cup \widehat{\alpha\beta} =$ .....

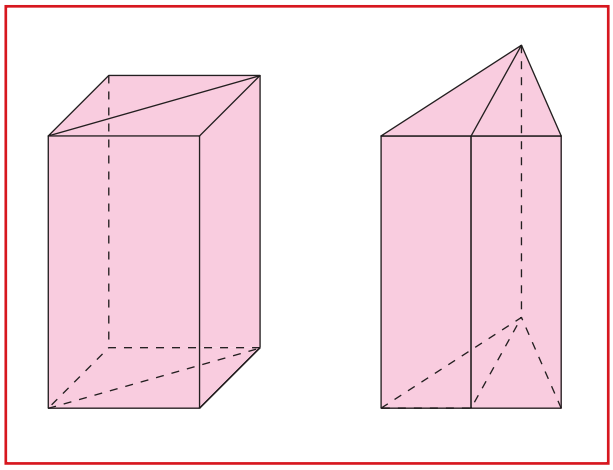


10. Per ognuna delle seguenti coppie di solidi equivalenti disegnane altre due ottenute rispettivamente sommando solidi equivalenti e sottraendo solidi equivalenti.



11. Considera i due solidi della figura. Rispondi alle domande supponendo che essi siano fatti dello stesso materiale omogeneo e non poroso. Come sono i due solidi? Perché? Come sono i loro pesi? Se immergiamo i due solidi in due recipienti graduati e parzialmente riempiti con la stessa quantità d'acqua, Che cosa succede?

N.B. *I due solidi hanno le basi equivalenti e le altezze congruenti.*



12. Due recipienti uguali e graduati contengono entrambi 100 cm^3 dello stesso liquido. Immergendo due solidi, *A* e *B*, rispettivamente nel primo e nel secondo recipiente, il liquido raggiunge il livello di 138 cm^3 e 142 cm^3. Qual è il solido che ha volume maggiore? Qual è la differenza tra i due volumi?

13. Due recipienti uguali e graduati contengono il primo 75 cm^3 e il secondo 112 cm^3 dello stesso liquido. Immergendo due solidi, *A* e *B*, rispettivamente nel primo e nel secondo recipiente, il liquido raggiunge il livello di 117 cm^3 e 154 cm^3. Come sono tra loro i due solidi?

14. Un oggetto di marmo pesa 0,572 kg; quale è il suo volume in cm^3 ed in dm^3 se il suo peso specifico è di 2,6? Se si raddoppia il peso, come varia il volume?
Se si dimezza il peso, come varia il volume?
[220 cm^3; ...]

15. Una bottiglia di vetro (*ps* 2,5) pesa 200 g e ha un volume di 0,9 dm^3.
Calcola il peso della bottiglia riempita di olio d'oliva (*ps* 0,91).
[1019 g]

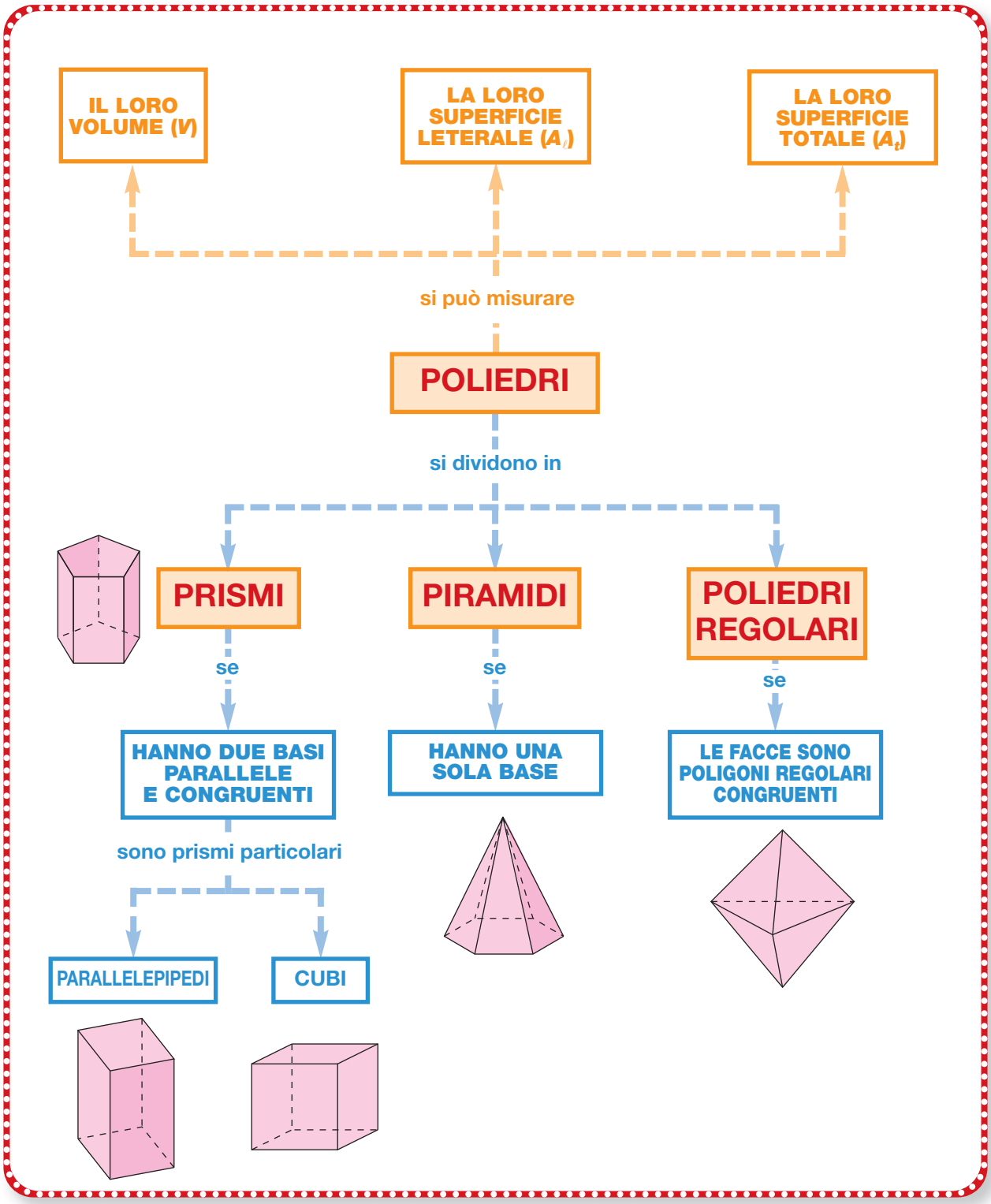
16. Una bottiglia piena di alcool (*ps* 0,8) pesa 0,85 kg e vuota 250 g. Calcola il peso della bottiglia riempita di benzina (*ps* 0,7).
[775 g]

17. Determina il peso specifico di un oggetto costituito di una lega ottenuta fondendo insieme 20 cm^3 di argento (*ps* 10,5) e 20 cm^3 di oro (*ps* 19,3).
[14,9]

18. Determina il peso specifico del miscuglio che si ottiene mescolando 4 litri di latte (*ps* 1,03) con 1 litro di acqua distillata (*ps* 1).
[1,024]

7 Poliedri, prismi e piramidi

ESERCIZI E ATTIVITÀ PER IL RECUPERO E PER IL POTENZIAMENTO

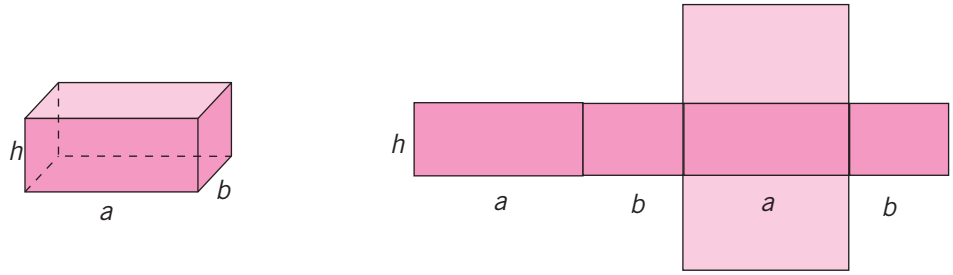


RECUPERO

Prima di effettuare gli esercizi per il recupero è opportuno che tu riveda la teoria sul libro di testo.

Parallelepipedo rettangolo e cubo

1. Osserva il parallelepipedo rettangolo sottostante, disegnato in prospettiva e il suo sviluppo sul piano.



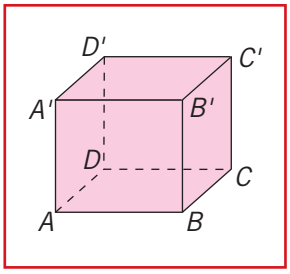
a; b; h: dimensioni del parallelepipedo rettangolo

Completa la tabella relativa alle formule dirette e inverse per il calcolo del perimetro di base ($2p$), dell'area di base (A_b), dell'area laterale (A_ℓ),dell'area totale (A_t) e del volume (V) di un parallelepipedo rettangolo.

FORMULE DIRETTE	FORMULE INVERSE	
$2p =$	$a = (2p : 2) - b$	$b =$ .....
$A_b =$	$a =$	$b = \frac{A_b}{a}$
$A_\ell =$	$2p = \frac{A_\ell}{h}$	$h =$ .....
$A_t =$	$A_b =$	$A_\ell = A_t - 2A_b$
$V =$	$a =$ ..... $b =$	$h =$ .....

Risolvi i seguenti problemi seguendo le indicazioni.

2. Le tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo misurano 5 cm, 17 cm e 15 cm. Calcola l'area laterale, quella totale e il volume.



$\overline{AB} = a = 17$ cm

$\overline{BC} = b = 5$ cm

$\overline{BB'} = h = 15$ cm

$A_\ell = ?$

$A_t = ?$

$V = ?$

Per calcolare l'area laterale serve il perimetro di base:

$2p = (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot 2 =$ .....

.....

$A_\ell = 2p \cdot h =$ .....

.....

per calcolare l'area totale serve l'area di base:

$A_b = \overline{AB} \cdot \overline{BC} =$ .....

$A_t = 2A_b + A_\ell =$ .....

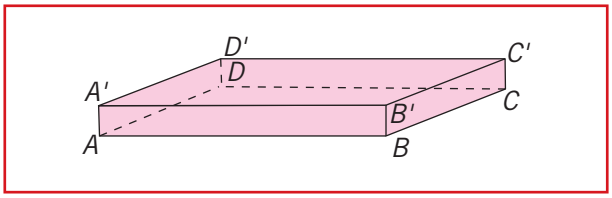
.....

applica, ora, la formula per il calcolo del volume:

$V = a \cdot b \cdot h = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BB'} =$ .....

.....

3. L'area di base di un parallelepipedo rettangolo è 432 m^2 e una dimensione di base misura 12 m; calcola l'area laterale, quella totale e il volume del parallelepipedo sapendo che è alto 3,8 m.



Completa i dati e le richieste:

A_b = ... A_ℓ = ...

$\overline{BC}$ = ... A_t = ...

$\overline{BB'}$ = ... V = ...

calcola l'altra dimensione di base, poi il perimetro di base e infine l'area laterale:

$\overline{AB} = \frac{A_b}{\overline{BC}}$ = ...

$2p$ = ...

$A_\ell = 2p \cdot \overline{BB'}$ = ...

.....

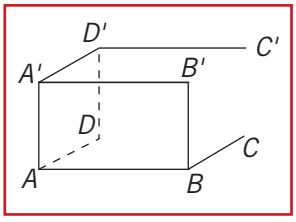
applica ora le formule per l'area totale e per il volume:

$A_t = A_l + 2A_b$ = ...

$V = a \cdot b \cdot h = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BB'}$ = ...

.....

4. Considera un parallelepipedo rettangolo alto 18 dm avente il volume e una dimensione di base rispettivamente di 8100 dm^3 e 30 dm. Calcola l'area laterale e l'area totale.
Completa il disegno, i dati e le richieste:



..... = 18 dm

..... = 8100 dm^3

$\overline{AB}$ = ...

A_ℓ = ...

A_t = ...

con la formula inversa del volume calcola l'altra dimensione di base:

$$\overline{AD} = \frac{V}{a \cdot h} = \frac{V}{\overline{AB} \cdot \overline{BB'}} = \frac{8100}{30 \cdot 18} = \ldots\ldots\ldots$$

calcola il perimetro di base e l'area laterale:

$2p = (a + b) \cdot 2$ = ...

.....

$A_\ell = 2p \cdot$ .....

.....

calcola, ora, l'area di base e l'area totale:

$A_b = a \cdot b$ = ...

$A_t = 2A_b +$ .....

Risolvi i seguenti problemi (*sono importanti un disegno preciso, i dati e le richieste*).

5. Le due dimensioni di base e l'altezza di un parallelepipedo rettangolo misurano rispettivamente 2,3 m, 4,5 m e 7 m; calcola l'area di base, quella laterale, quella totale e il volume.
[10,35 m^2; 95,20 m^2; 115,90 m^2; ...]

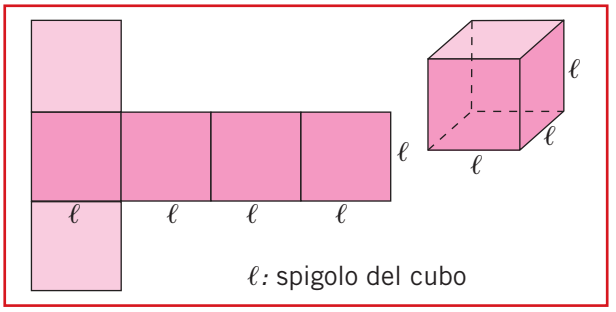
6. Il perimetro e una dimensione di base di un parallelepipedo rettangolo misurano rispettivamente 58 dm e 20 dm; sapendo che il volume è 2520 dm^3, calcola l'area laterale e quella totale. [812 dm^2; 1172 dm^2]

7. L'area laterale di un parallelepipedo rettangolo è 960 cm^2 e le dimensioni di base misurano 84 cm e 12 cm; calcola l'area di base, quella totale e il volume.
[1008 cm^2; 2976 cm^2; 5040 cm^3]

8. Il volume di un parallelepipedo rettangolo alto 61 cm è 32940 cm^3; calcola l'area laterale e l'area totale sapendo che una dimensione di base misura 45 cm. [6954 cm^2; 8034 cm^2]

9. Le tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono tali che la seconda (b) e la terza (h) sono rispettivamente il doppio e il triplo della prima (a). Sapendo che la loro somma misura 72 m, calcola l'area totale e il volume del parallelepipedo.
(*In 72 m ci sono* 1 + 2 + 3 = ... *parti congruenti alla dimensione minore a; quindi ...*).
[3168 m^2; 10368 m^3]

10. Osserva il **cubo** sottostante disegnato in prospettiva e il suo sviluppo sul piano.

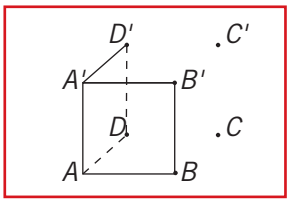


Completa la tabella relativa alle formule dirette e inverse per il calcolo dell'area di base (A_b), dell'area laterale (A_ℓ), dell'area totale (A_t) e del volume (V) di un cubo.

FORMULE DIRETTE	FORMULE INVERSE
A_b = ...	$\ell = \sqrt{\ldots\ldots}$
$A_\ell = 4 \cdot \ell^2$	$\ell = \sqrt{\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}}$
A_t = ...	$\ell = \sqrt{\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}}$
V = ...	$\ell = \sqrt[3]{\ldots\ldots}$

Risolvi i seguenti problemi seguendo le indicazioni.

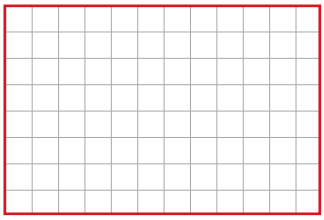
11. L'area di una faccia di un cubo è 28,09 dm^2; calcola l'area laterale, l'area totale e il volume del cubo.
Completa il disegno, i dati e le richieste:



$A_{(ABCD)}$ = ...
A_ℓ = ...
A_t = ...
V = ...

l'area laterale di un cubo comprende 4 facce; quindi:
$A_\ell = A_{(ABCD)} \cdot 4$ = ...
.....
l'area totale comprende ..... facce; quindi:
A_t = ...
.....
calcola la misura dello spigolo del cubo utilizzando la formula inversa dell'area del quadrato e calcola infine il volume:
$\overline{AB} = \sqrt{.....}$ = ...
V = ...

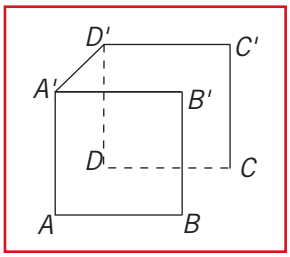
12. L'area totale di un cubo è 1944 cm^2; calcola l'area laterale e il volume: .....



Esegui il disegno e completa i dati e le richieste:
A_t = 1944 cm^2
A_ℓ = ...
V = ...

Calcola lo spigolo del cubo utilizzando la formula inversa dell'area totale:
$\overline{AB} = \sqrt{\frac{.....}{.....}}$ = ...
applica le formule per calcolare l'area laterale e il volume:
A_ℓ = ...
V = ...

13. Calcola l'area laterale e quella totale di un cubo avente il volume di 50,653 m^3.
Completa il disegno, i dati e le richieste:



V = ...
A_ℓ = ...
A_t = ...

determina la misura dello spigolo estraendo la radice cubica del volume:
$\overline{AB}$ = ...
applica ora le formule per il calcolo di area laterale e totale:
A_ℓ = ...
A_t = ...

Risolvi i seguenti problemi (*sono importanti un disegno preciso, i dati e le richieste*).

14. Calcola l'area totale e il volume di un cubo avente l'area laterale di 484 m^2.
[726 m^2; 1331 m^3]

15. Considera un cubo la cui area totale misura 3174 dm^2 e calcolane l'area laterale e il volume. [2116 dm^2; 12167 dm^3]

16. L'area di una faccia di un cubo è 1089 cm^2; calcola l'area laterale, quella totale e il volume.
[4356 cm^2; 6534 cm^2; 35937 cm^3]

17. Dato un cubo avente il volume di 6859 m^3, calcolane lo spigolo, l'area laterale e quella totale.
[19 m; 1444 m^2; 2166 m^2]

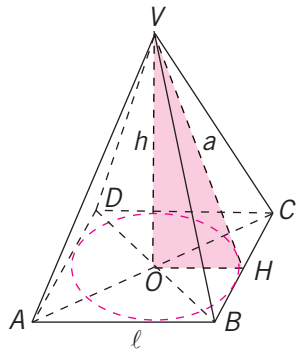
18. Lo spigolo di un cubo misura 13,5 cm; calcola l'area totale e il volume di tale cubo.
[1093,50 cm^2; 2460,375 cm^3]

19. Completa la seguente tabella relativa a dei cubi.

Spigolo	Area laterale	Area totale	Volume
3,5 m			
	125,44 dm^2		
			1728 cm^3
		600 dm^2	
	43,56 m^2		
			12,167 m^3
		1441,50 dm^2	
45 cm			

Piramide quadrangolare regolare

20. Osserva l'illustrazione della piramide quadrangolare regolare e completa le affermazioni inserendo i termini, i simboli e le relazioni adeguate.



..... = vertice della piramide

..... = apotema di base = $\frac{1}{2}$ · .....

VH = apotema della piramide

..... = altezza della piramide

..... = spigolo di base = 2 · .....

Il triangolo VOH è un triangolo

..... in cui:

VO e ..... sono i cateti e VH è .....

21. Facendo riferimento all'illustrazione dell'esercizio precedente, considera il triangolo rettangolo VOH e completa le applicazioni del teorema di Pitagora:

$VH = \sqrt{VO^2 + ...}$ $\quad$ $VO = \sqrt{..... - .....}$ $\quad$ $OH = \sqrt{..... - .....}$

22. Contrassegna la descrizione relativa a ciascuna formula della piramide quadrangolare regolare:

a) $A_\ell = \frac{2p \cdot a}{2}$

Per calcolare l'area laterale della piramide si deve:

- ☐ moltiplicare per 2 il perimetro e poi dividere il prodotto
- ☐ sommare il perimetro con l'apotema e poi dividere per 2
- ☐ dividere per 2 il prodotto di perimetro e apotema.

b) $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

Per calcolare il volume della piramide si deve:

- ☐ moltiplicare area di base e altezza
- ☐ dividere per tre il prodotto di area di base e altezza
- ☐ sommare area di base e altezza e dividere per tre.

c) $A_b = \ell^2$

Per calcolare l'area di base della piramide si deve:

- ☐ elevare al quadrato la misura dello spigolo di base
- ☐ raddoppiare la misura dello spigolo di base
- ☐ moltiplicare la misura dello spigolo di base.

d) $a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

Per calcolare l'apotema della piramide si deve:

- ☐ sommare le misure di apotema di base e altezza
- ☐ estrarre la radice quadrata della somma del quadrato dell'altezza e del quadrato dell'apotema di base
- ☐ elevare al quadrato apotema di base e altezza.

e) $2p = \ell \cdot 4$

Per calcolare il perimetro di base della piramide si deve:

- ☐ sommare le misure degli spigoli
- ☐ elevare al quadrato la misura del lato
- ☐ moltiplicare per quattro la misura dello spigolo di base.

f) $A_t = A_b + A_\ell$

Per calcolare l'area totale della piramide si deve:

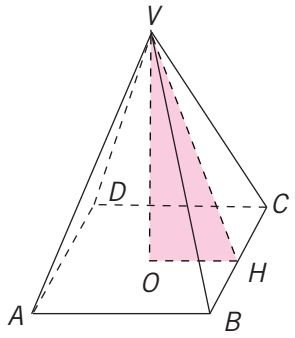
- ☐ sommare l'area di base e l'area laterale
- ☐ moltiplicare l'area di base con l'area laterale
- ☐ sottrarre l'area di base dall'area laterale.

23. Completa la seguente tabella relativa alle formule dirette e inverse di una piramide quadrangolare regolare avente, quindi, per base un quadrato.
(con *a* si intende l'apotema della piramide, gli altri simboli sono quelli gia usati per il parallelepipedo e il cubo).

FORMULE DIRETTE	FORMULE INVERSE	
$2p =$	$\ell =$	
$A_b =$	$\ell =$	
$A_\ell =$	$2p =$	$a = \frac{A_\ell \cdot 2}{.....}$
$A_t =$	$A_b =$	$A_\ell =$ .....
$V =$	$A_b =$	$h = \frac{V \cdot 3}{.....}$

Risolvi i seguenti problemi seguendo le indicazioni.

24. Considera una piramide quadrangolare regolare in cui lo spigolo di base e l'altezza misurano 10 m e 12 m; calcola l'area laterale e quella totale.



ABCD è un quadrato

$\overline{AB} =$ .....

$\overline{VO} =$ .....

$A_\ell =$ .....

$A_t =$ .....

applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *VOH* per calcolare l'apotema *VH*:

$\overline{OH} = \overline{AB} : 2 =$ .....

$\overline{VH} = \sqrt{\overline{OH}^2 + ...} =$ .....

calcola il perimetro di base e poi l'area laterale:

$2p_{(ABCD)} = \overline{AB} \cdot$ .....

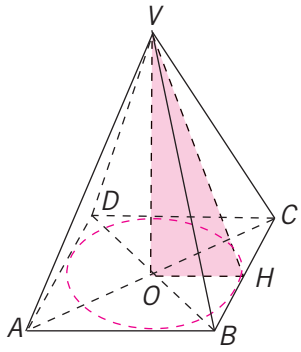
$A_\ell = \frac{2p \cdot \overline{VH}}{2} =$ .....

calcola l'area di base e poi l'area totale:

$A_b =$ .....

$A_t = A_\ell +$ .....

25. L'area totale di una piramide quadrangolare regolare è 6144 cm^2 e il perimetro di base misura 192 cm; calcola l'area laterale della piramide.



ABCD è un quadrato

$A_t =$ .....

$2p_{(ABCD)} =$ .....

$A_\ell =$ .....

calcola la misura dello spigolo di base, che è il lato del quadrato *ABCD*:

$\overline{AB} =$ .....

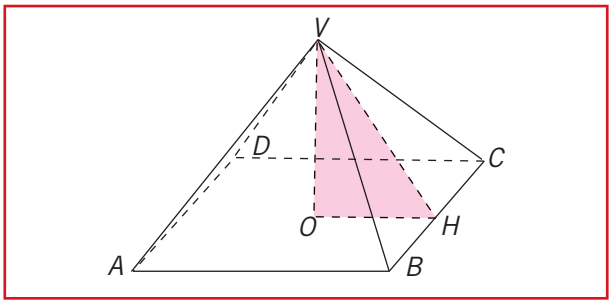
calcola l'area del quadrato di base:

$A_b =$ .....

applica la formula inversa dell'area totale per calcolare l'area laterale:

$A_\ell = A_t -$ .....

26. Il perimetro del quadrato di base di una piramide quadrangolare regolare misura 168 dm; calcola l'area laterale e quella totale sapendo che l'altezza della piramide misura 28 dm.



ABCD è un quadrato

$2p_{(ABCD)}$ = ...

$\overline{VO}$ = ...

A_ℓ = ...

A_t = ...

calcola lo spigolo e l'apotema di base:

$\overline{AB} = 2p : 4$ = ...

$\overline{OH}$ = ...

calcola l'area di base, cioè l'area del quadrato *ABCD*:

A_b = ...

applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *VOH* per trovare l'apotema della piramide:

$\overline{VH} = \sqrt{.....+.....}$ = ...

.....

calcola l'area laterale e poi quella totale, applicando le formule adeguate:

A_ℓ = ...

A_t = ...

Risolvi i seguenti problemi (*sono importanti il disegno, i dati e le richieste*).

27. Lo spigolo di base e l'altezza di una piramide quadrangolare misurano rispettivamente 6 m e 4 m; calcola l'area di base, quella laterale e quella totale. [36 m^2; 60 m^2; 96 m^2]

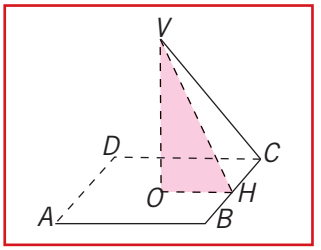
28. Considera una piramide quadrangolare regolare avente l'apotema della piramide e quello di base rispettivamente di 10,4 cm e 4 cm; calcola l'area laterale e quella totale. [166,40 cm^2; 230,40 cm^2]

29. Data una piramide quadrangolare regolare avente l'area laterale di 2800 cm^2 e l'apotema di 50 cm, calcola l'area di base e quella totale. [784 cm^2; 3584 cm^2]

30. Una piramide quadrangolare regolare ha l'area laterale di 1476 m^2 e il perimetro di 72 m; calcola l'altezza e l'area totale della piramide. [40 m; 1800 m^2]

Risolvi i seguenti problemi seguendo le indicazioni.

31. Il volume di una piramide quadrangolare regolare è 6720 cm^3; calcola l'area totale sapendo che il perimetro di base misura 96 cm. Completa il disegno, i dati e le richieste:



ABCD è un quadrato

V = ...

$2p_{(ABCD)}$ = ...

A_t = ...

Calcola la misura dello spigolo e dell'apotema di base:

$\overline{AB}$ = ...

$\overline{OH}$ = ...

calcola l'area di base, cioè l'area del quadrato *ABCD*:

A_b = ...

applica la formula inversa del volume per trovare la misura dell'altezza:

$\overline{VO} = \dfrac{V \cdot 3}{.....}$ = ...

applica il teorema di Pitagora al triangolo *VOH* per determinare la misura dell'apotema:

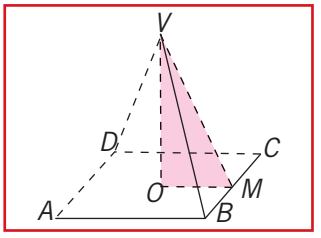
$\overline{VH} = \sqrt{\overline{VO}^2 + ...}$ .....

calcola l'area laterale e infine l'area totale:

A_ℓ = ...

A_t = ...

32. Considera una piramide quadrangolare regolare avente l'area laterale di 3840 dm^2 e il perimetro di base di 192 dm; calcola il volume. Completa il disegno, i dati e le richieste:



A_ℓ = ...

$2p_{(ABCD)}$ = ...

V = ?

calcola lo spigolo e l'apotema di base:

$\overline{AB}$ = ...

$\overline{OM}$ = ...

calcola l'area di base:

A_b = ...

calcola l'apotema della piramide applicando la formula inversa dell'area laterale:

$\overline{VM} = \dfrac{.....}{2p_{(ABCD)}}$ = ...

applica il teorema di Pitagora al triangolo *VOM* per trovare l'altezza della piramide:

$\overline{VO} = \sqrt{.....-.....}$ = ...

.....

applica la formula per calcolare il volume:

$V = \dfrac{.....}{3}$ = ...

Risolvi i seguenti problemi (*sono importanti il disegno, i dati e le richieste*).

33. L'altezza e l'apotema di una piramide quadrangolare regolare misurano rispettivamente 15 cm e 17 cm; calcola l'area totale e il volume. [800 cm^2; 1280 cm^3]

34. In una piramide quadrangolare regolare l'area totale è di 1536 dm^2 e l'area di base è equivalente ai $\frac{3}{8}$ dell'area totale; calcola l'area laterale e il volume. [960 dm^2; 3072 dm^3]

35. Il volume di una piramide quadrangolare regolare è 11200 cm^3 e lo spigolo di base misura 40 cm; calcola l'area di base, l'area laterale e l'area totale. [1600 cm^2; 2320 cm^2; 3920 cm^2]

36. L'apotema di base e l'apotema di una piramide quadrangolare regolare misurano rispettivamente 11 dm e 61 dm; calcola l'area totale, il volume e il peso della piramide sapendo che è di alluminio (ps = 2,7). [3168 dm^2; 9680 dm^3; 26136 kg]

37. Completa la seguente tabella relativa a delle piramidi quadrangolari regolari.

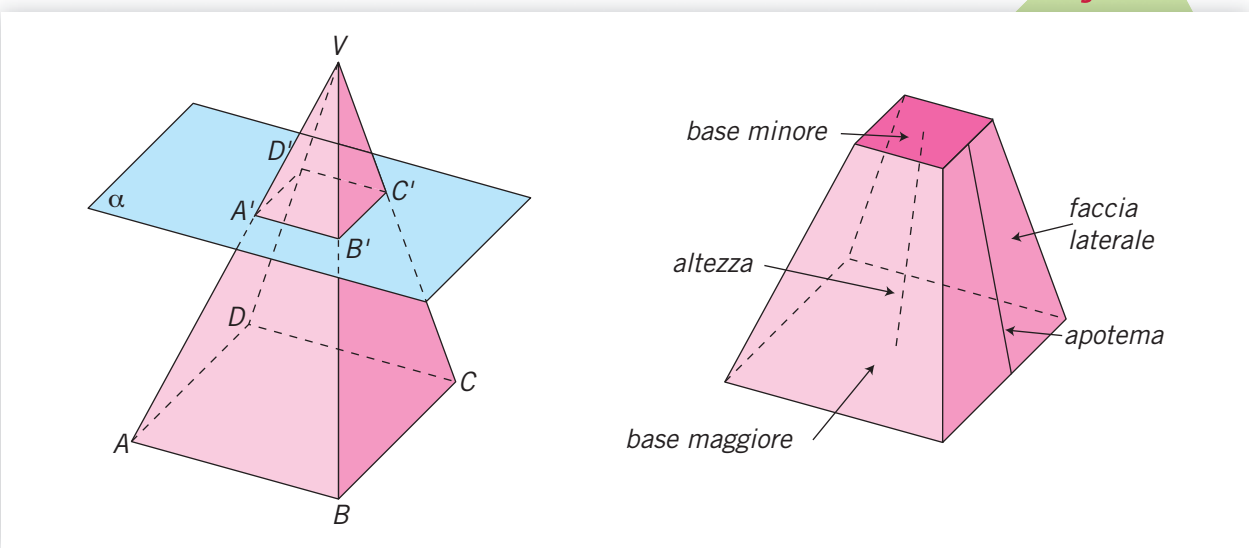
Spigolo di base	2p (base)	Apotema	Altezza	Area base	Area laterale	Area totale	Volume
		65 cm	63 cm				
			48 m	784 m^2			
				324 dm^2			1296 dm^3

POTENZIAMENTO

Tronco di piramide

Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base si ottengono due solidi: una piramide che ha per vertice lo stesso vertice della piramide iniziale e per base la sezione ottenuta tagliandola con il piano, e un poliedro, detto **tronco di piramide**, costituito da due poligoni di base simili e da tanti trapezi che formano le facce laterali quanti sono i lati del poligono di base (figura 1).

figura 1



Un tronco di piramide retto è un poliedro limitato da due poligoni di base simili e da tante facce laterali, costituite da tanti trapezi, quanti sono i lati del poligono di base.

Si chiama **altezza del tronco di piramide** la distanza fra le due basi.

Un tronco di piramide si dice retto se la piramide da cui si ottiene il tronco è retta e in questo caso le facce laterali sono trapezi aventi le altezze congruenti tra loro. Tale altezza viene chiamata **apotema del tronco di piramide**.

Le facce laterali hanno tutte l'altezza della medesima lunghezza; tale altezza è detta apotema del tronco di piramide.

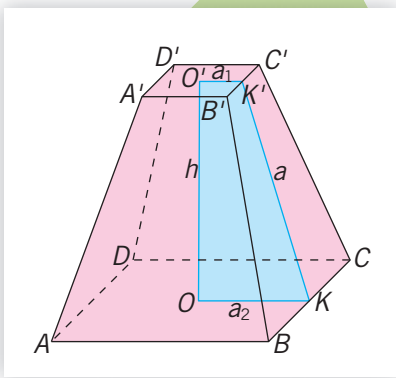
Un tronco di piramide è regolare se la piramide da cui è stato ottenuto è regolare e in questo caso le facce laterali sono dei trapezi isosceli congruenti. In questo testo consideriamo solo tronchi di piramide retta.

In conclusione:

Nel tronco di piramide regolare le facce laterali sono trapezi isosceli congruenti tra loro.

In un tronco di piramide regolare gli apotemi delle due basi, l'altezza del tronco e il suo apotema formano un trapezio rettangolo (figura 2). Operando in modo opportuno su questo trapezio è possibile determinare uno degli elementi conoscendo gli altri.

figura 2



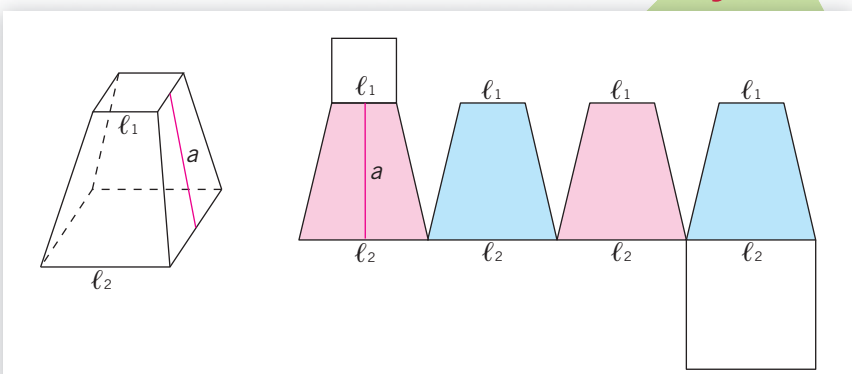
Ad esempio, indicando con a_2 e a_1 rispettivamente la misura della base maggiore e di quella minore del trapezio $OKK'O'$ e con h e a la misura dell'altezza e la misura dell'apotema del tronco, si ottiene:

$$a^2 = h^2 + (a_2 - a_1)^2$$

oppure $h^2 = a^2 - (a_2 - a_1)^2$ oppure $(a_2 - a_1)^2 = a^2 - h^2$.

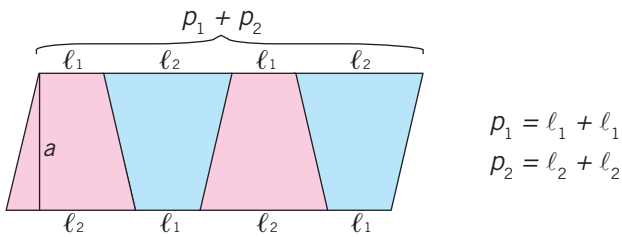
Per individuare le relazioni che permettono di calcolare l'area della superficie laterale e l'area della superficie totale, consideriamo, ad esempio, lo sviluppo nel piano della superficie di un tronco di piramide regolare a base quadrangolare.

figura 3



Si osserva che lo sviluppo della superficie laterale è costituito da tanti trapezi isosceli congruenti tra loro quanti sono i lati di ciascuna base, aventi tutti come altezza l'apotema (a) del tronco di piramide. Con i quattro trapezi isosceli si può comporre un parallelogramma la cui base è la somma dei due semiperimetri, p_1 e p_2, delle basi del tronco. L'altezza del parallelogramma è l'apotema del tronco (figura 4).

figura 4



Quindi, per calcolare l'area della superficie laterale del tronco di piramide basta calcolare l'area del parallelogramma equivalente:

$$\boldsymbol{A_\ell = (p_1 + p_2) \cdot a}$$

Ovvero:

L'area della superficie laterale di un tronco di piramide regolare si ottiene moltiplicando la somma dei semiperimetri delle basi per la misura dell'apotema del tronco.

Dalla relazione appena evidenziata si ottengono quelle inverse:

$$a = \frac{A_\ell}{p_1 + p_2} \quad e \quad p_1 + p_2 = \frac{A_\ell}{a}$$

Inoltre si ha che:

L'area della superficie totale del tronco di piramide regolare si ottiene sommando all'area della superficie laterale le aree delle due basi.

In forma sintetica:

$$\boldsymbol{A_t = A_\ell + A_1 + A_2}$$

dove con A_1 e A_2 si indicano l'area della base minore e l'area della base maggiore del tronco.
Le formule evidenziate valgono per qualsiasi tronco di piramide, purché **retto**.
Si ricorda, inoltre, che nel caso in cui il tronco di piramide sia retto, ma non regolare, le facce laterali sono trapezi non congruenti tra loro.

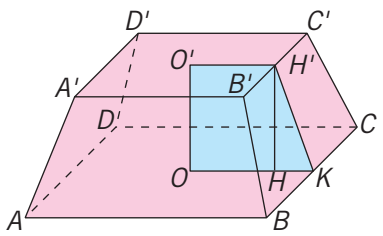
Per il volume di un tronco di piramide retto ci limitiamo a riportare direttamente la formula in quanto la sua dimostrazione non è di facile comprensione.

$$V = \frac{A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}}{3} \cdot h$$

dove con A_1, A_2 e h si indicano rispettivamente l'area della base minore, l'area della base maggiore e la misura dell'altezza del tronco.
In conclusione:

Il volume di un tronco di piramide si ottiene sommando tra loro le aree delle basi e la radice quadrata del loro prodotto, moltiplicando il totale ottenuto per la misura dell'altezza del tronco e dividendo, infine, il prodotto per tre.

1. Completa le seguenti relazioni e proposizioni riferendoti al tronco di piramide regolare disegnato.



– $O'H'$ è ..... della base minore del tronco di piramide.
OK è ..... della .....
$\overline{HK} = \overline{OK}$ – .....

– Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo HKH', si può scrivere:
$\overline{HH'} = \sqrt{.....}$; $\overline{HK} = \sqrt{.....}$; $\overline{H'H} = \sqrt{.....}$;

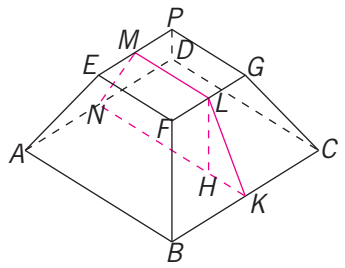
– La base inferiore $ABCD$ e quella superiore $A'B'C'D'$ sono poligoni .....;
le facce laterali del tronco di piramide sono ..... isosceli.....

2. Completa le seguenti tabelle in cui con i simboli p_1, p_2, A_1, A_2, h, a, V sono indicate rispettivamente la misura del semiperimetro della base minore, la misura del semiperimetro della base maggiore, l'area della base minore, l'area della base maggiore, la misura dell'altezza, la misura dell'apotema e il volume di un tronco di piramide regolare quadrangolare in cui ℓ_1 è lo spigolo della base minore e ℓ_2 è quello della base maggiore.

ℓ_2 (cm)	ℓ_1 (cm)	p_2 (cm)	p_1 (cm)	a (cm)	A_ℓ (cm^2)	CALCOLO
15	10			8		$p_1 = \ell_1 \cdot 2 =$ ..... $p_2 = \ell_2 \cdot 2 =$ ..... $A_\ell = (p_1 + p_2) \cdot a =$ ..... $= 400$ cm^2
7				30	600	$p_1 + p_2 = A_\ell : a =$ ..... $p_2 = \ell_2 \cdot 2 =$ ..... $p_1 =$ ..... $\ell_2 =$ ..... $= 3$ cm
14	9				736	$p_1 =$ ..... $p_2 =$ ..... $p_1 + p_2 =$ ..... $= 46$ cm $a = A_\ell :$ ... $=$ .....

ℓ_2 (cm)	ℓ_1 (cm)	A_2 (cm)	A_1 (cm)	h (cm)	V_ℓ (cm^3)	CALCOLO
12	10			18		$A_1 = \ell_1^2 =$ ..... $A_2 = \ell_2^2 =$ ..... $V = \dfrac{A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}}{3} \cdot h =$ ....

3. Risolvi il seguente problema utilizzando i dati assegnati.



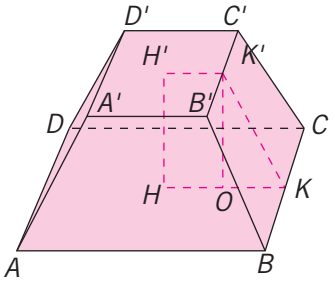
Dati

$ABCD$ è un quadrato
$EFGP$ è un quadrato
$ML \parallel NK$
$LK \perp BC$
$AE \cong BF \cong CG \cong DP$
$\overline{AB} = 42$ cm
$\overline{EF} = 24$ cm
$\overline{LH} = 12$ cm
$A_\ell = ?$

Risoluzione

$NK \cong$ ..... $ML \cong$ .....
$\overline{HK} = (\overline{NK} - \overline{HK})$: ..... = ... = 9 cm
$\overline{LK} = \sqrt{\overline{HK}^2 + \ldots\ldots} = \sqrt{9^2 + \ldots\ldots} =$
.....
$p_1 = \overline{AB} \cdot$ ..... = ...
$p_2 = \overline{EF} \cdot$ ..... = ...
$A_\ell =$ .....
.....$= 1980$ cm^2

Risolvi i seguenti problemi relativi a tronchi di piramidi rette.



4. $AB \cong BC \cong CD \cong AD$ $\qquad A_t = ?$
$A'B' \cong B'C' \cong C'D' \cong A'D'$
$HK \parallel H'K'$
$KK' \perp BC$
$A_{(ABCD)} = 64$ cm^2
$A_{(A'B'C'D')} = 49$ cm^2
$\overline{KK'} = 11$ cm $\qquad$ [443 cm^2]

5. $AB \cong BC \cong CD \cong AD$ $\quad A_t = ?$
$A'B' \cong B'C' \cong C'D' \cong A'D'$
$HK \,//\, H'K'$
$KK' \perp BC$
$\overline{KK'} = 7$ cm
$2p_{(ABCD)} = 48$ cm
$2p_{(A'B'C'D')} = 32$ cm [488 cm^2]

6. $AB \cong BC \cong CD \cong AD$ $\quad KK' = ?$
$A'B' \cong B'C' \cong C'D' \cong A'D'$ $\quad A_t = ?$
$HK \,//\, H'K'$ $\quad V = ?$
$KK' \perp BC$
$\overline{HH'} = 4$ cm
$\overline{AB} = 16$ cm
$\overline{A'B'} = 10$ cm [5 cm; 616 cm^2; 688 cm^3]

7. Un tronco di piramide retto ha l'area laterale di 1548 cm^2 e l'apotema che misura 18 cm. Sapendo che il perimetro della base maggiore misura 100 cm, calcola il perimetro della base minore. [72 cm]

8. In un tronco di piramide retto il perimetro della base minore misura 30 cm, il perimetro della base maggiore 50 cm e l'apotema 16 cm. Calcola l'area laterale del tronco di piramide. [640 cm^2]

9. In un tronco di piramide retto l'area della superficie laterale è 660 cm^2 e l'apotema misura 12 cm. Calcola il perimetro della base maggiore e il perimetro della base minore sapendo che il primo è i $\frac{7}{4}$ dell'altro. [70 cm; 40 cm]

10. L'area della superficie laterale di un tronco di piramide quadrangolare regolare è di 85 cm^2 e gli spigoli delle basi misurano rispettivamente 5,5 cm e 3 cm. Calcola la misura dell'apotema. [5 cm]

11. In un tronco di piramide quadrangolare regolare il lato della base minore è i $\frac{3}{5}$ del lato della base maggiore. Calcola l'area della superficie totale e il volume del tronco di piramide sapendo che l'altezza e l'apotema misurano rispettivamente 24 cm e 25 cm. [4466 cm^2; 19 208 cm^3]

12. Un tronco di piramide regolare quadrangolare ha per basi due quadrati che hanno rispettivamente le aree di 144 dm^2 e 49 dm^2. Sapendo che l'apotema è lungo 6,5 dm, determina il volume del tronco di piramide. [554 dm^3]

13. L'area laterale di un tronco di piramide regolare esagonale è 2940 cm^2. Calcola la misura degli spigoli delle due basi sapendo che il loro rapporto è $\frac{3}{4}$ e che l'apotema misura 28 cm. [20 cm; 15 cm]

14. In un tronco di piramide regolare quadrangolare gli spigoli delle due basi misurano rispettivamente 6 cm e 15 cm e l'altezza è congruente allo spigolo della base minore. Calcola l'area della superficie totale e il volume del tronco di piramide. [576 cm^2; 702 cm^3]

15. In un tronco di piramide regolare quadrangolare i perimetri delle due basi misurano rispettivamente 144 cm e 64 cm. Sapendo che l'altezza misura 24 cm, determina l'area della superficie totale e il volume del tronco di piramide. [4256 cm^2; 17 024 cm^3]

16. Un tronco di piramide regolare quadrangolare ha i perimetri delle due basi che misurano rispettivamente 78 cm e 42 cm e l'area della sua superficie totale è di 940,50 cm^2. Calcola il volume del tronco di piramide. [1390,500 cm^3]

17. Un solido di vetro (*ps* 2,5) è costituito da un tronco di piramide regolare quadrangolare sormontato da un cubo con una faccia coincidente con la base minore del tronco. Calcola il peso del solido sapendo che i perimetri delle due basi e l'apotema del tronco di piramide misurano rispettivamente 176 cm, 48 cm e 34 cm. [69 520 g]

18. Un solido di marmo (*ps* 2,7) è costituito da un parallelepipedo retto a base quadrata avente il lato di base di 6 dm e l'altezza di 12 dm, sormontato da un tronco di piramide regolare quadrangolare la cui base maggiore coincide con la base del parallelepipedo. Determina il peso del solido sapendo che l'area delle sua superficie totale è di 392 dm^2 e che lo spigolo della base minore del tronco di piramide misura 4 dm. [1330,56 kg]

19. Un parallelepipedo retto a base quadrata, alto 10 cm, è sormontato da un tronco di piramide avente la base maggiore coincidente con la base del parallelepipedo.
Calcola l'area della superficie e il volume del solido sapendo che l'area della superficie laterale, l'area della base maggiore e l'apotema del tronco di piramide misurano rispettivamente 400 cm^2, 132,25 cm^2 e 12,5 cm. [1012,50 cm^2; 2139,500 cm^3]

20. Una piramide regolare quadrangolare ha lo spigolo di base di 21 cm e l'altezza di 14 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del tronco di piramide che si ottiene tagliandola con un piano parallelo alla base e distante da questa 7 cm.
[1102,5 cm^2; 1800,75 cm^3]

21. Una piramide regolare quadrangolare ha lo spigolo di base di 14 cm e l'altezza di 24 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del tronco di piramide che si ottiene tagliando la piramide data con un piano parallelo alla sua base e distante da essa $\frac{3}{4}$ dell'altezza.
[864,5 cm^2; 1543,5 cm^3]

22. Una piramide regolare quadrangolare ha lo spigolo di base di 36 cm e l'altezza di 48 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del tronco di piramide che si ottiene tagliando la piramide con un piano parallelo alla sua base e distante da essa 32 cm.
[4720,8 cm^2; 19 968 cm^3]

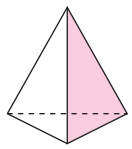
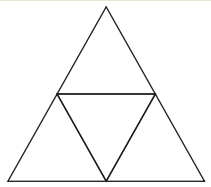
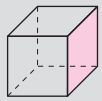
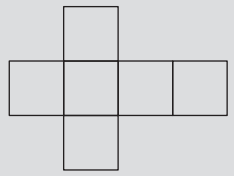
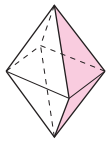
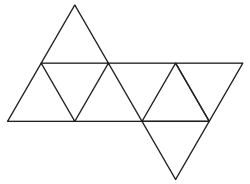
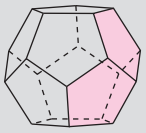
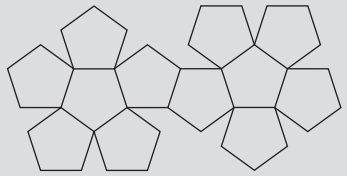
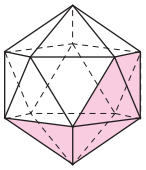
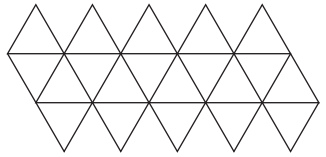
23. Una piramide regolare quadrangolare ha l'area della superficie laterale di 175 cm^2 e l'area della superficie di base di 49 cm^2. Calcola il volume del tronco di piramide ottenuto sezionando la piramide con un piano parallelo alla base e distante da essa 6 cm.
[171,500 cm^3]

Poliedri regolari

Un poliedro si dice regolare se tutte le sue facce sono poligoni regolari congruenti tra loro e tutti i diedri e gli angoloidi sono rispettivamente congruenti tra loro.

Tra tutti i poliedri ne esistono solo cinque che sono regolari:
il tetraedro regolare, l'esaedro regolare o cubo, l'ottaedro regolare, il dodecaedro regolare, l'icosaedro regolare. Nella figura 1 sono riportate le rappresentazioni ed i relativi sviluppi dei cinque poliedri regolari.

figura 1

Tetraedro regolare è limitato da 4 triangoli equilateri congruenti, ha 6 spigoli e 4 vertici		
Esaedro regolare o cubo è limitato da 6 quadrati congruenti, ha 12 spigoli e 8 vertici		
Ottaedro regolare è limitato da 8 triangoli equilateri congruenti, ha 12 spigoli e 6 vertici		
Dodecaedro regolare è limitato da 12 pentagoni regolari congruenti, ha 30 spigoli e 20 vertici		
Icosaedro regolare è limitato da 20 triangoli equilateri congruenti, ha 30 spigoli e 12 vertici		

Nome del poliedro	Numero delle facce	Poligono regolare che forma le facce	Numero dei vertici	Numero degli spigoli	Numero delle facce che si incontrano in un vertice
tetraedo	4	triangolo	4	6	3
cubo (esaedro)	6	quadrato	8	12	3
ottaedro	8	triangolo	6	12	4
dodecaedro	12	pentagono	20	30	3
icosaedro	20	triangolo	12	30	5

Le facce di un poliedro regolare sono congruenti fra loro; quindi, per calcolare l'**area della superficie totale** basta moltiplicare l'area di una faccia per il numero delle facce del poliedro.
In forma sintetica si ha:

$$A_t = A_f \cdot n$$

dove con A_f si indica l'area di una faccia e con n il numero delle facce.
Dalla relazione appena evidenziata si ricava quella inversa: $A_f = A_t : n$.
Per individuare la relazione che permette di calcolare il **volume** di un poliedro regolare bisogna tener presente che ogni poliedro regolare è scomponibile in un certo numero di piramidi congruenti fra loro.
Il **tetraedro** è esso stesso una piramide (figura 2).
Il **cubo** è scomponibile in tre piramidi congruenti tra loro e a base quadrata (figura 3).

figura 2

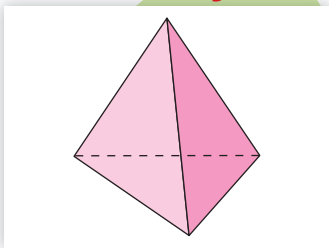


figura 3

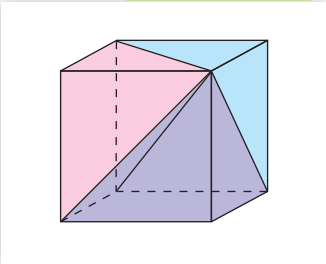
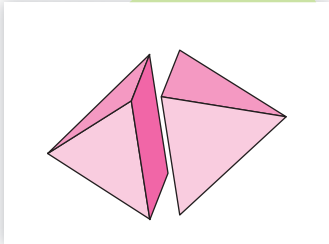


figura 4



L'**ottaedro** può scomporsi in due piramidi regolari congruenti a base quadrata (figura 4).
Il **dodecaedro** è scomponibile in dodici piramidi congruenti tra loro a base pentagonale, aventi il vertice in comune in un punto interno equidistante da tutti i vertici del poliedro. Tale punto è il centro del dodecaedro regolare (figura 5).
L'**icosaedro** è scomponibile in venti piramidi congruenti tra loro aventi per base un triangolo equilatero e per vertice il centro del poliedro (figura 6).
Tenendo conto delle considerazioni appena fatte e delle proprietà dei poliedri regolari, si giunge alla relazione che permette di calcolare il volume di un poliedro regolare:

figura 5

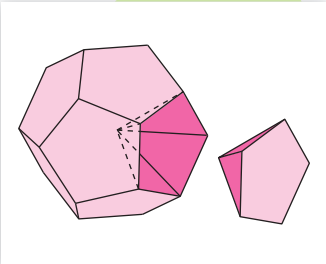
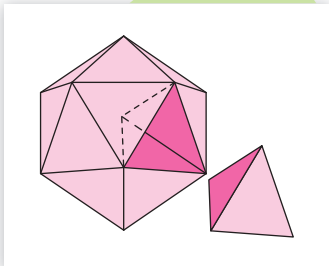


figura 6



$$V = \ell^3 \cdot \textbf{numero fisso}$$

dove con ℓ si indica la misura dello spigolo del poliedro regolare. Dalla relazione appena evidenziata si ottiene quella inversa:

$$\ell = \sqrt[3]{\frac{V}{\text{numero fisso}}}$$

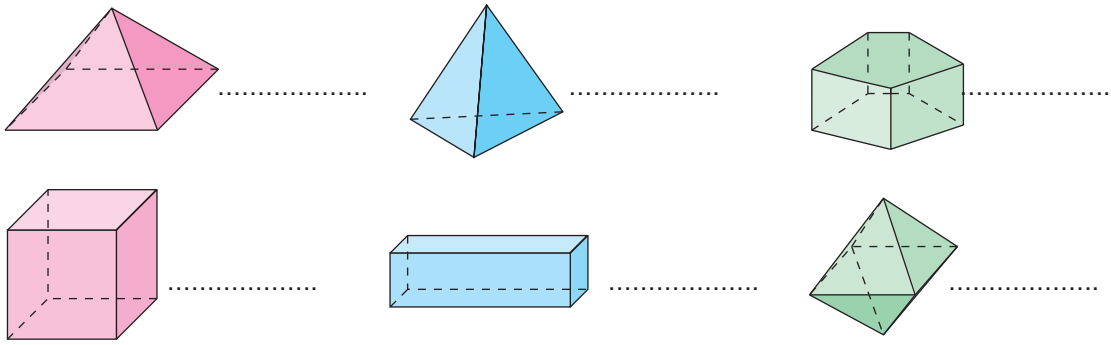
Nella tabella a lato sono riportati i numeri fissi da utilizzare per il calcolo dei volumi dei poliedri regolari (i valori sono arrotondati al millesimo)

Poliedro regolare	Numero fisso
tetraedo	0,118
cubo	1
ottaedro	0,471
dodecaedro	7,663
icosaedro	2,182

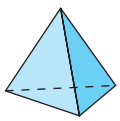
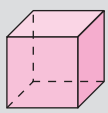
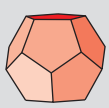
Riassumendo:

L'area della superficie di un poliedro regolare si calcola moltiplicando l'area di una faccia per il numero delle facce. Il volume di un poliedro regolare si calcola moltiplicando il cubo della misura del suo spigolo per un numero fisso che dipende dal numero delle facce del poliedro considerato.

24. Fra i seguenti poliedri indica quelli che potrebbero essere regolari e scrivi il loro nome.



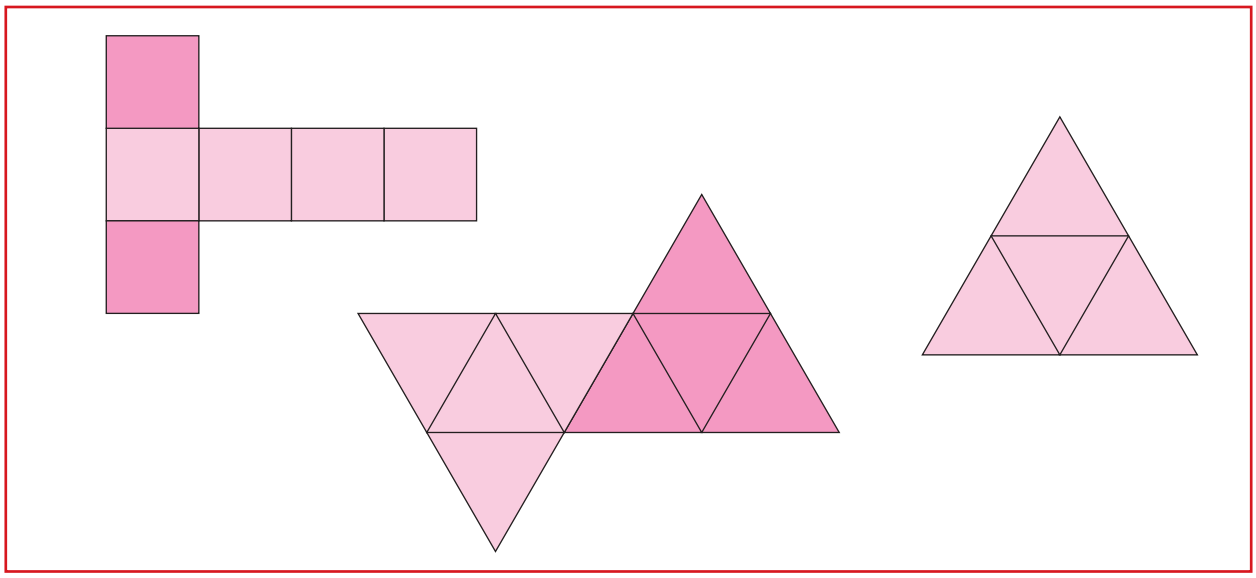
25. Completa la seguente tabella relativa ai poliedri regolari.

Nome e figura	Forma dei poligoni	Numero delle facce (f)	Numero dei vertici (v)	Numero degli spigoli (s)	Verifica la relazione di Eulero: $f + v = s + 2$
 ..... regolare	triangoli				$4 + 4 = 6 + 2$
 ..... o esaedro regolare					
..... regolare	triangoli				
 ..... regolare	regolari				
..... regolare	triangoli				

26. Tenendo conto della somma delle ampiezze degli angoli che concorrono in un vertice, scrivi il motivo per cui i poliedri regolari sono solo 5.

27. Scrivi quante sono le diagonali del tetraedro, del cubo e dell'ottaedro.

28. Copia i seguenti sviluppi piani su un foglio di carta o su un cartoncino, in scala 2 : 1; costruisci poi, ritagliando gli sviluppi, i poliedri regolari ad essi relativi.



29. La somma delle lunghezze degli spigoli di un tetraedro regolare misura 60 cm.
Calcola l'area della superficie del tetraedro.
[173,20 cm^2]

30. Lo spigolo di un tetraedro regolare misura 10 cm; calcola l'area della sua superficie e il volume. [173,20 cm^2; 118 cm^3]

31. Il perimetro di una faccia di un tetraedro regolare è 90 cm. Calcola l'area della superficie e il volume. [1558,80 cm^2; 3186 cm^3]

32. Il volume di un tetraedro regolare misura 25,488 dm^3. Calcola la misura dello spigolo.
[6 dm]

33. Calcola l'area della superficie e il volume di un ottaedro regolare avente lo spigolo lungo 20 cm.
[1385,60 cm^2; 3768 cm^3]

34. Il volume di un ottaedro regolare misura 241,152 cm^3. Calcola l'area della superficie.
[221,696 cm^2]

35. Lo spigolo di un dodecaedro regolare misura 3 cm.
Calcola l'area della superficie e il volume.
[185,76 cm^2; 206,901 cm^3]

36. Un tetraedro, un esaedro, un ottaedro, un dodecaedro e un icosaedro regolari hanno tutti lo spigolo lungo 5 cm.
Quale dei cinque solidi ha la superficie maggiore? Quale dei cinque solidi ha il volume maggiore?

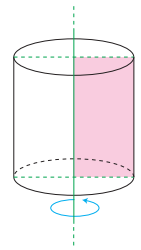
37. Un icosaedro regolare ha lo spigolo che misura 7 cm.
Calcola l'area della superficie totale e il volume.
[424,34 cm^2; 748,426 cm^3]

38. Un icosaedro regolare ha il volume di 17,456 cm^3.
Calcola la misura dello spigolo. [2 cm]

39. Un icosaedro regolare ha il volume che misura 2182 cm^3; calcola l'area della superficie.
[866 cm^2]

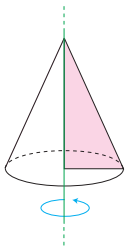
8 Solidi di rotazione

ESERCIZI E ATTIVITÀ PER IL RECUPERO E PER IL POTENZIAMENTO



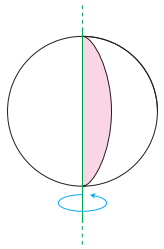
CILINDRO

Rotazione completa di un **rettangolo** attorno ad uno dei suoi lati



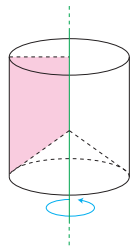
CONO

Rotazione completa di un **triangolo rettangolo** attorno ad uno dei suoi cateti



SFERA

Rotazione completa di un **semicerchio** attorno al suo diametro



ALTRI SOLIDI DI ROTAZIONE

Rotazione completa di altre figure piane attorno ad una retta

ROTAZIONE COMPLETA (360°) DI UNA FIGURA PIANA ATTORNO AD UNA RETTA

si ottengono dalla

SOLIDI DI ROTAZIONE

le misure degli sviluppi delle superfici sul piano sono dette

AREA DELLA SUPERFICIE LATERALE (A_l)

AREA DELLA SUPERFICIE TOTALE (A_t)

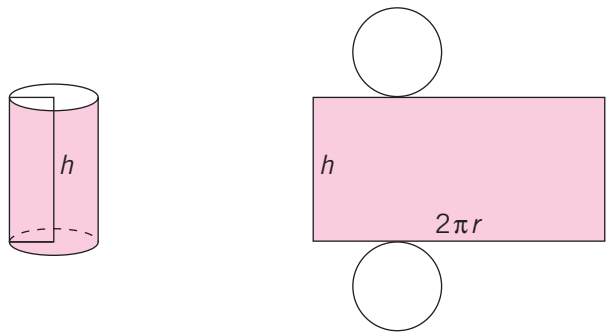
la misura della parte di spazio che occupano è detta

VOLUME (V)

RECUPERO

Prima di effettuare gli esercizi per il recupero
è opportuno che tu riveda la teoria sul libro di testo.

1. Osserva il cilindro e il suo sviluppo su un piano.



h = altezza

r = raggio di base

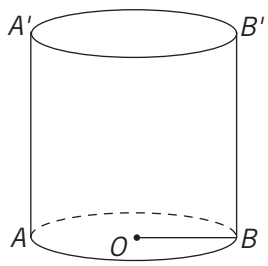
Completa la tabella che riporta le formule dirette e inverse relative a un cilindro.

FORMULE DIRETTE	FORMULE INVERSE	
$c =$	$r = \frac{c}{2\pi}$	
$A_b = \pi r^2$	$r =$	
$A_\ell =$	$r =$	$h =$ .....
$A_t =$	$A_\ell = A_t - 2A_b$	$A_b =$ .....
$V =$	$r =$	$h =$ .....

Risolvi i seguenti problemi seguendo le indicazioni.

2. Considera un cilindro avente il raggio di base e l'altezza di 18 cm e 40 cm; calcola l'area laterale, quella totale e il volume.

$\overline{OB} =$ ..... $\overline{BB'} =$ ..... $A_\ell =$ ..... $A_t =$ ..... $V =$ .....



applica la formula per l'area laterale e lascia indicato π:

$A_\ell = 2\pi r \cdot h =$ .....

se i tuoi calcoli sono esatti il risultato è 1440π cm^2;

calcola l'area di base e poi l'area totale lasciando indicato π:

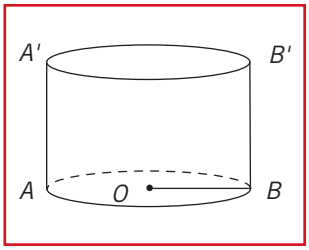
$A_b = \pi r^2 =$ .....

$A_t =$ .....

applica la formula per determinare il volume:

$V = \pi r^2 \cdot h =$ .....

3. L'area totale di un cilindro è 1360π dm^2 e il diametro di base misura 40 dm. Calcola il volume del cilindro.
Completa i dati e le richieste:



A_t = ...

$\overline{AB}$ = ...

V = ...

calcola la misura del raggio e l'area di base (lascia indicato π):

$\overline{OB}$ = ...

A_b = ...

calcola l'area laterale utilizzando la formula inversa dell'area totale:

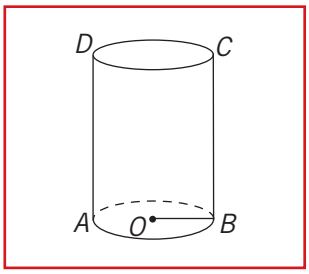
$A_\ell = A_t -$ .....

calcola l'altezza utilizzando la formula inversa dell'area laterale:

$\overline{AA'} = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{2\pi r} =$ .....

applica ora la formula per il calcolo del volume:
V = ...

4. Un cilindro ha il volume di 550π m^3 e la circonferenza di base di 10π m. Calcola l'area totale.



V = ...

c = ...

A_t = ...

calcola la misura del raggio e l'area di base (lascia indicato π):

$\overline{OB} = \dfrac{c}{\ldots\ldots\ldots} =$ .....

A_b = ...

utilizzando la formula inversa del volume, determina la misura dell'altezza:

$\overline{BC} = \dfrac{V}{\ldots\ldots\ldots} =$ .....

calcola l'area laterale e poi quella totale:

A_ℓ = ...

.....

A_t = ...

Risolvi i seguenti problemi (*sono importanti un disegno preciso, i dati e le richieste*).

5. In un cilindro l'altezza misura 35 cm e il raggio di base è i suoi $\frac{3}{5}$. Calcola la misura del raggio, l'area laterale, quella totale e il volume.
[21 cm; 1470π cm^2; 2352π cm^2; 15435π cm^3]

6. L'area laterale di un cilindro è 765π m^2; calcola l'area totale e il volume sapendo che il cilindro è alto 17 m.
[$1777{,}50\pi$ m^2; $8606{,}250\pi$ m^3]

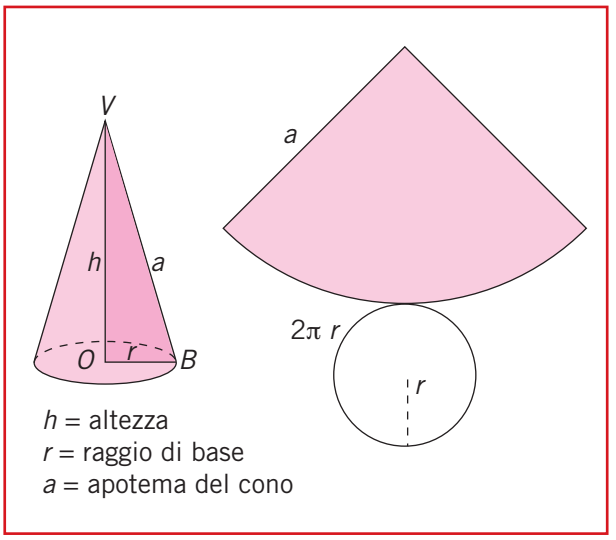
7. Un cilindro alto 27 dm ha l'area di base di 441π dm^2; calcola l'area totale e il volume.
[2016π dm^2; $11\,907\pi$ dm^3]

8. Il volume di un cilindro è 1813π cm^3 e la circonferenza di base è 14π cm; calcola l'area totale.
[616π cm^2]

9. L'area totale di un cilindro è 180π dm^2 ed è il quintuplo di quella di base; calcola il volume del cilindro.
[324π dm^3]

10. Un cilindro ha il volume di $27{,}225\pi$ m^3 e il diametro di 3 m; calcola l'area laterale e quella totale.
[$36{,}30\pi$ m^2; $40{,}80\pi$ m^2]

11. Considera un **cono** e il suo sviluppo su un piano.



Considera, ora, il triangolo OBV e completa le seguenti relazioni applicando il teorema di Pitagora:

$a = \overline{VB} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots}$

$h = \overline{VO} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots}$

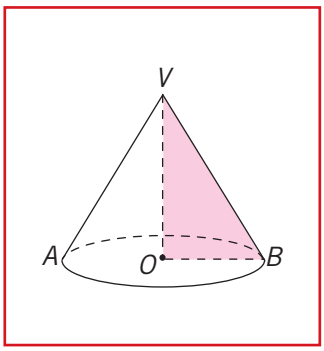
$r = \overline{OB} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots}$

12. Completa la tabella che riporta le formule dirette e inverse relative al cono.

FORMULE DIRETTE	FORMULE INVERSE	
$c =$	$r =$	
$A_b =$	$r =$	
$A_\ell = \pi \cdot r \cdot a$	$r =$	$a =$ .....
$A_t =$	$A_\ell =$	$A_b =$ .....
$V = \frac{\text{.....}}{3}$	$h =$	$r =$ .....

Completa i seguenti problemi seguendo le indicazioni.

13. Calcola l'area laterale, quella totale e il volume di un cono avente l'apotema e l'altezza rispettivamente di 5,3 m e 4,5 m.



..... = 5,3 m

$\overline{VO} =$ .....

$A_\ell =$ .....

$A_t =$ .....

$V =$ .....

Applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *VOB* per calcolare il raggio di base:

$\overline{OB} = \sqrt{\overline{VB}^2 - \text{.....}} =$ .....

.....

applica le formule per il calcolo dell'area laterale, di quella totale e del volume, lasciando indicato π:

$A_\ell = \pi \cdot r \cdot a =$ .....

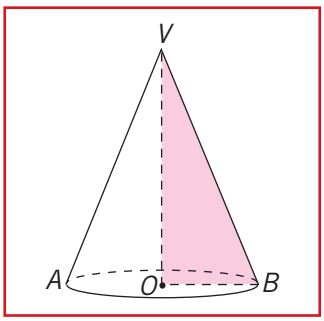
.....

$A_t =$ .....

$V = \frac{\text{.....}}{3} =$ .....

.....

14. Considera un cono avente l'area di base di 225π dm^2 e l'altezza che è i $\frac{12}{5}$ del raggio di base. Calcola l'area totale e il volume.



$A_b =$ .....

$\overline{VO} =$ .....

$A_t =$ .....

$V =$ .....

Calcola il raggio di base utilizzando la formula inversa dell'area di base:

$\overline{OB} = \sqrt{\text{.....}} =$ .....

calcola l'altezza e poi l'apotema:

$\overline{VO} = \frac{12}{5} \cdot \overline{OB} =$ .....

$\overline{VB} = \sqrt{\text{.....} + \text{.....}} =$ .....

.....

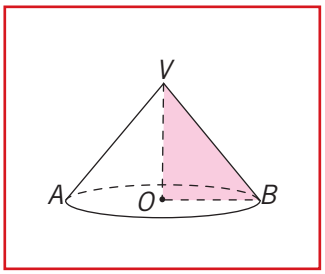
applica ora le formule per il calcolo dell'area laterale, di quella totale e del volume, lasciando indicato π.

$A_\ell =$ .....

$A_t =$ .....

$V =$ .....

15. Il volume di un cono è 6144π cm^3 e l'altezza del cono misura 32 cm; calcola l'area totale.



$V =$ .....

$\overline{VO} =$ .....

$A_t =$ .....

Con la formula inversa del volume calcola il raggio di base:

$\overline{OB} = \sqrt{\dfrac{\dots\dots\cdot 3}{\pi \cdot h}} =$ .....

applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *VOB* per calcolare la misura dell'apotema:

$\overline{VB} =$ .....

.....

calcola ora l'area di base, quella laterale e quella totale, lasciando indicato π:

$A_b =$ .....

$A_\ell =$ .....

$A_t =$ .....

Risolvi i seguenti problemi (*sono importanti un disegno preciso, i dati e le richieste. Lascia indicato il valore di* π):

16. In un cono alto 21 dm, il raggio di base misura 20 dm; calcola l'area laterale, quella totale e il volume.
[580π dm^2; 980π dm^2; 2800π dm^3]

17. Considera un cono avente l'area laterale di 135π m^2 e l'apotema di 15 m; calcola l'area totale e il volume.
[216π m^2; 324π m^3]

18. L'area totale e quella di base di un cono sono rispettivamente 1536π cm^2 e 576π cm^2; calcola l'area laterale e il volume.
[960π cm^2; 6144π cm^3]

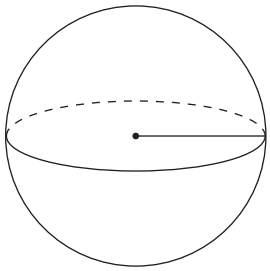
19. L'area di base di un cono è 441π cm^2 e l'apotema è i $\frac{5}{3}$ del raggio di base; calcola l'area totale e il volume del cono.
[1176π cm^2; 4116π cm^3]

20. Un cono ha l'area laterale di 65π dm^2 e l'apotema che misura 13 dm. Calcola l'area totale e il volume del cono.
[90π dm^2; 100π dm^3]

21. Completa la seguente tabella relativa a dei coni.

Raggio r	Altezza h	Apotema a	Area di base A_b	Area laterale A_ℓ	Area totale A_t	Volume V
	9,6 dm					$51{,}200\pi$ dm^3
			$56{,}25\pi$ cm^2		150π cm^2	
3,2 m				$21{,}76\pi$ m^2		
9 cm		41 cm				
	7,2 dm	7,5 dm				

22. Completa la seguente tabella relativa alla sfera, in cui le unità di misura sono espresse rispettivamente in cm, cm^2 e cm^3.



$r \rightarrow$ misura del raggio

$c_m \rightarrow$ misura della circonferenza massima

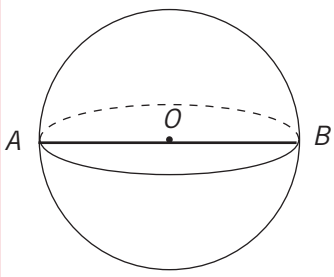
$A_{cm} \rightarrow$ area del cerchio massimo

$A_{sf} \rightarrow$ area della superficie sferica

$V_s \rightarrow$ volume della sfera

r	c_m	A_{cm}	$A_{sf} = 4\pi r^2$	$V_s = \frac{4}{3}\pi r^3$
5				
	15π			
		254,34		
			400π	
				2304π

23. Una sfera ha il diametro del cerchio massimo lungo 30 cm. Calcola l'area della superficie sferica e il volume della sfera.



$\overline{AB}$ = ... $A_{sf} = ?$

$V = ?$

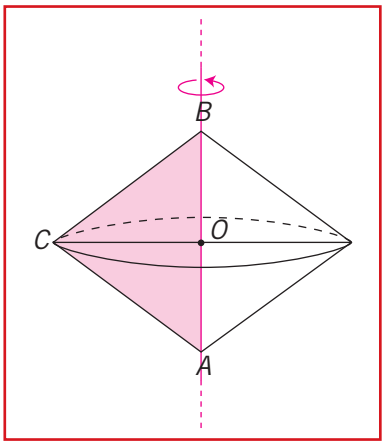
Calcola la misura del raggio AO:

$\overline{AO} = \overline{AB} : 2 =$ .....

$A_{sf} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi$ ..... = ...

$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot .....}{3} =$ .....

24. In un triangolo isoscele la base e l'altezza misurano rispettivamente 30 cm e 20 cm. Determina l'area della superficie totale e il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo attorno alla base.



$\overline{BC} = \overline{AC}$ $\overline{AB} = \ldots\ldots\ldots$ $\overline{OC} = \ldots\ldots\ldots$ $A_{(solido)} = ?$ $V_{(solido)} = ?$

$\overline{OB} = \overline{AB} : 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{OC}^2 + \ldots\ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_{\ell(cono)} = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot 20 \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \pi\ cm^2$

$A_{(solido)} = 2 \cdot A_{\ell(cono)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1000\pi\ cm^2$

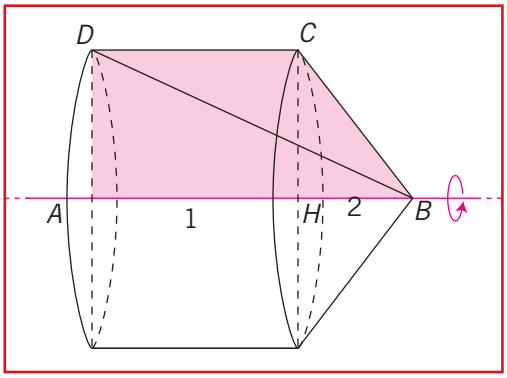
$V_{(cono)} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 20^2 \cdot \ldots\ldots}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$V_{(solido)} = 2 \cdot V_{(cono)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 4000\pi\ cm^3$

25. Un triangolo isoscele ha la base e il lato obliquo che misurano rispettivamente 90 dm e 75 dm. Determina l'area della superficie totale e il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo attorno alla base.

[$9000\pi\ dm^2$; $108000\pi\ dm^3$]

26. Un trapezio rettangolo ha il lato obliquo di 30 cm, la diagonale maggiore di 51 cm e l'altezza di 24 cm. Determina l'area della superficie e il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore.



$\overline{BC} = \ldots\ldots\ldots$ $\overline{BD} = \ldots\ldots\ldots$ $\overline{CH} = \ldots\ldots\ldots$

$A_s = ?$ $V_s = ?$

Considera il triangolo rettangolo *BHC* per calcolare *BH*:

$\overline{BH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \ldots\ldots\ldots} = \sqrt{30^2 - \ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots = 18$ cm.

Considera il triangolo rettangolo *BAD* per calcolare *AB*:

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{51^2 - 24^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

$\overline{DC} = \overline{AB} - \overline{BH} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

L'area della superficie del solido è costituita dalla somma dell'area laterale del cilindro (1), dell'area laterale del cono (2) e dell'area di base.

$A_{\ell(cilindro)} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_{\ell(cono)} = \pi \cdot r \cdot a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 24^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_{(solido)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2592\pi\ cm^2$

Il volume del solido è costituito dalla somma del volume del cilindro e del volume del cono.

$V_{(cilindro)} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$V_{(cono)} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$V_{(solido)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 19008\pi\ cm^3$

27. Un trapezio isoscele ha i lati obliqui che misurano 10,4 cm ognuno e le basi che misurano 12 cm e 20 cm. Determina l'area della superficie e il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore.

[$430{,}080\pi\ cm^2$; $1351{,}68\pi\ cm^3$]

POTENZIAMENTO

1. Un contenitore a forma di cilindro contiene 6 palline da ping pong che sono disposte in modo da essere perfettamente aderenti le une alle altre e alle pareti del contenitore. Sapendo che le palline da ping pong hanno il diametro che misura 2,4 cm, calcola il volume del contenitore cilindrico e il volume di ogni pallina da ping pong.

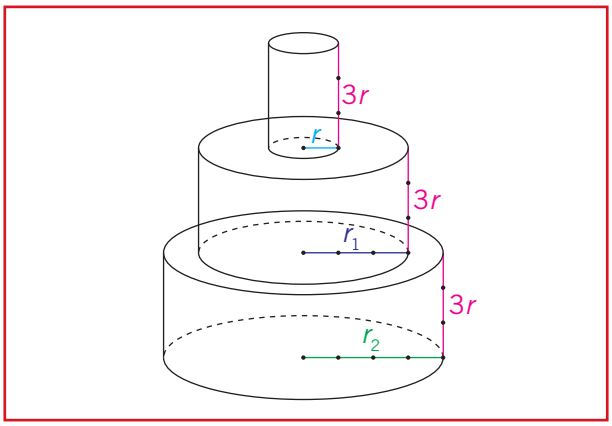
[20,736π cm^3; 2,304π cm^3]

2. Un cilindro, avente il raggio di base e l'altezza che misurano 45 cm, presenta una cavità a forma di semisfera il cui raggio è lungo quanto quello del cilindro. Determina il volume del solido e confronta questo volume con quello di un cono retto che abbia la stessa altezza e lo stesso raggio del cilindro. Che cosa osservi?

[30 375π cm^3]

3. Calcola, in funzione di r, l'area della superficie e il volume del solido rappresentato nella figura, sapendo che $r_1 = 3r$ e $r_2 = 4\,r$.
Determina inoltre l'area della superficie e il volume del solido considerato nel caso in cui $r = 15$ cm.

[18 000π cm^2; 263 250π cm^3]



4. Determina quale relazione deve intercorrere tra raggio e altezza di un cilindro retto, affinché:
a) l'area della superficie laterale sia uguale all'area delle due basi;
(*Scrivi la formula per calcolare l'area laterale, poi nel primo membro dell'uguaglianza sostituisci A_ℓ con la formula per calcolare due volte l'area del cerchio di base. Infine dividi il primo membro e il secondo membro dell'uguaglianza per i fattori comuni ....*)
b) l'area di ogni base sia $\frac{1}{3}$ dell'area della superficie laterale.

5. Completa la seguente tabella in cui con A_b e V sono indicate rispettivamente l'area della superficie di base e il volume di alcuni cilindri aventi la stessa altezza di 15 cm.

A_b (cm^2)	9π		45π		1,5π	
V (cm^3)		270π		45π		1350π

Poni l'area della superficie di base uguale a x, il volume uguale a y e scrivi la legge che lega la y alla x. È una legge di proporzionalità diretta o inversa? Rappresenta tale legge su un piano cartesiano: che tipo di grafico ottieni?

6. Completa la seguente tabella in cui con A_ℓ e A_t sono indicate rispettivamente l'area della superficie laterale e l'area della superficie totale di alcuni cilindri aventi la stessa area di base 80 cm^2.

A (cm^2)	200		400		600	
A_t (cm^2)		460		660		260

Poni l'area della superficie laterale uguale a x, l'area della superficie totale uguale a y e scrivi la legge che lega la y alla x. La relazione tra x e y è una proporzionalità? Rappresenta tale legge in un piano cartesiano.

7. Sul fondo di una scatola chiusa sono adagiati due solidi equivalenti, uno conico e l'altro cilindrico, che lasciano libero, nell'interno della scatola, uno spazio avente il volume di 240,69 dm^3. Le misure, in decimetri, dei diametri del cono e del cilindro sono numeri direttamente proporzionali a 6 e 8 e la loro somma è 7 dm. La scatola ha la forma di un parallelepipedo rettangolo avente l'area della superficie totale di 263 dm^2 e le dimensioni della base di 9 dm e 8 dm.
Si chiede di stabilire quale dei due solidi è più alto e di quanto.

[Il cono; 1,95 dm]

1 Uso delle bilance per esprimere situazioni problematiche

Competenze trasversali

- Comprendere ed interpretare informazioni e comunicare con linguaggi diversi
- Formulare ipotesi
- Mettere in relazione.
- Generalizzare
- Individuare e porre problemi.

Aree e nuclei tematici

- Il numero
- Introduzione al pensiero razionale

Abilità disciplinari

- Scoprire le regole per la risoluzione delle equazioni
- Scoprire i principi di equivalenza della equazioni
- Esprimere e risolvere situazioni problematiche con le equazioni

(Lo spunto per questa attività e i successivi problemi sono stati scaricati dal sito internet "base-cinque - appunti di matematica creativa")

1ª FASE Lavoro di gruppo

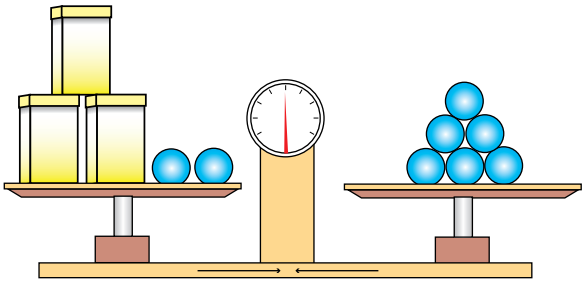
All'inizio è opportuno che si facciano lavorare gli alunni in piccoli gruppi di 3 o 4. Gli alunni devono cercare e trovare la soluzione della situazione problematica loro proposta e verificarla di volta in volta. È inoltre opportuno che gli alunni si esercitino a lungo sulla bilancia; pertanto, è necessario che ogni gruppo ne abbia una a disposizione.

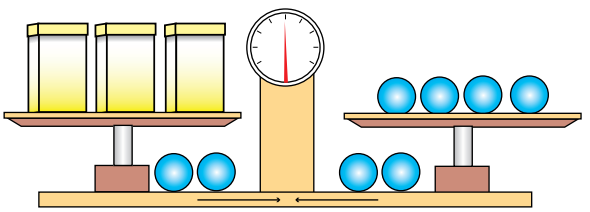
Materiale occorrente: bilance a due piatti rettangolari o rotondi, pesi uguali e dello stesso tipo (bulloni, sfere metalliche, chiodi, monete ecc.).

Procedimento

– Su un piatto si mettono alcune scatole che si possano chiudere ed aprire. Sull'altro piatto si mettono dei pesi in modo da equilibrare la bilancia.
– Di nascosto dagli alunni, l'insegnante mette dei pesi nelle scatole, chiudendoli poi con i coperchi, e sullo stesso piatto su cui sono poste le scatole colloca un certo numero di pesi.
– Sul secondo piatto vengono messi dei pesi in modo che la bilancia ritorni in equilibrio.

A questo punto si invitano gli alunni a individuare il numero di pesi che sono stati sistemati nelle scatole (incognita x).





Agli alunni in un primo tempo sembrerà che la soluzione sia quella di togliere i pesi visibili dal piatto su cui sono collocate le scatole chiuse, lasciando solo i pesi in esse nascosti. Così facendo, la bilancia pende dal lato del piatto senza le scatole e quindi, per ricreare l'equilibrio, è necessario togliere da questo piatto un numero di pesi uguale a quello tolto dal piatto con le scatole. Dopo aver effettuato molte esperienze di

questo tipo, si invitano gli alunni a riflettere sul fatto che in ogni caso considerato la condizione di equilibrio è stata ricreata **togliendo lo stesso numero di pesi** visibili dal primo e dal secondo piatto e che il numero di pesi nascosti nelle scatole è dato dal numero di pesi rimasti sull'altro piatto.

- Esempio:

$$x + 2 = 6$$

Numero di pesi contenuti nelle scatole — pesi visibili sul primo piatto — pesi visibili sul secondo piatto

Si tolgono due pesi visibili sia dal primo piatto che dal secondo:

$$x + 2 - 2 = 6 - 2$$

pertanto si ha:

$$x = 4$$

- Altro esempio:

$$x + 5 = 11$$

Si tolgono 5 pesi dal primo e dal secondo piatto:

$$x + 5 - 5 = 11 - 5$$

Ottenendo:

$$x = 6$$

È opportuno ripetere molte altre esercitazioni di questo tipo.

A questo punto si introduce il **primo principio di equivalenza delle equazioni**: si ottiene una equazione equivalente a quella data sottraendo lo stesso numero ad entrambi i membri dell'equazione. Nel caso in cui nell'equazione data ci sia l'incognita meno un numero, si applica la regola inversa, cioè si addiziona lo stesso numero ad entrambi i membri dell'equazione:

- Esempio

$$x - 3 = 5$$

$$x - 3 + 3 = 5 + 3$$

$$x = 8$$

Per verificare il **secondo principio di equivalenza delle equazioni** si procede nel seguente modo: nel primo piatto della bilancia si riempiono due o più scatole con lo stesso numero di pesi e si equilibrano sull'altro piatto.

- Esempio:

$$x + x = 18$$

Le due scatole contengono lo stesso numero di pesi — pesi visibili sul secondo piatto

È evidente che la soluzione si trova dividendo 18 per 2:

$$x = \frac{18}{2}$$

- Altro esempio:

$$x + x + x = 30$$

In questo caso la soluzione si trova dividendo 30 per 3:

$$x = \frac{30}{3}$$

È opportuno ripetere molte altre esercitazioni di questo tipo.

A questo punto si può enunciare il **secondo principio di equivalenza**: si ottiene una equazione equivalente a quella data dividendo per lo stesso numero entrambi i membri dell'equazione.
Nel caso in cui nell' equazione data ci sia l'incognita diviso un numero, si applica la regola inversa, cioè si moltiplicano per lo stesso numero entrambi i membri dell'equazione.

- Esempio:

$$\frac{x}{4} = 2$$

Si moltiplicano per 4 entrambi i membri dell'equazione, ottenendo:

$$\frac{x}{\cancel{4}_1} \cdot \cancel{4}^1 = 2 \cdot 4$$

$$x = 8$$

2ª FASE

Si propongono agli allievi i seguenti problemi che hanno a che fare con pesi e bilance.

- **Dividere lo zucchero**
  Si ha una bilancia a bracci uguali e due soli pesi, uno di 10 g e l'altro di 40 g.
  Con 3 sole pesate si devono separare 1800 grammi di zucchero in due parti rispettivamente di 400 e 1400 grammi.

- **Con soli 4 pesi**
  Le bilance a bracci uguali sono corredate da una serie di pesi-campione che permettono di misurare tutti i pesi degli oggetti in un dato intervallo e con una certa precisione. Se si perde uno solo di questi pesi campione... sono guai. Quindi, meno ce ne sono e meglio è.
  Un commerciante fece costruire 4 pesi-campione con i quali poteva misurare tutti i pesi, chilo per chilo (cioè con la precisione di 1 kg) da 1 a 40 chili.
  Quanto pesava ciascuno dei 4 pesi campione?

- **Monete false (un vero classico)**
  Ci sono 10 pacchetti da 10 monete ciascuno.
  Uno di essi contiene solo monete false mentre gli altri contengono monete vere.
  Una moneta vera pesa 10 grammi, mentre una moneta falsa pesa 9 g.
  È possibile, con una bilancia ad ago di precisione e una sola pesata, scoprire qual è il pacchetto delle monete false?
  E se i pacchetti fossero stati 11?

- **Monete di cioccolato avvelenate**
  Abbiamo 5 sacchetti di monete di cioccolato da 1,1 kg ciascuno.
  Alcuni sacchetti sono pieni di monete avvelenate, altri invece contengono soltanto monete buone. Ma non sappiamo né quanti, né quali.
  Sappiamo, però che le monete buone pesano 10 g ciascuna mentre quelle avvelenate pesano 11 grammi.
  Inoltre abbiamo una bilancia digitale che ha una portata massima di 5 kg e indica i pesi in grammi.
  Com'è possibile, con una sola pesata scoprire quali sono i sacchetti pieni di monete avvelenate e quelli pieni di monete buone?

- **Risparmiare soldi con la bilancia automatica**
  Tre ragazzi A, B, C vogliono pesarsi con una bilancia automatica spendendo solo una moneta.
  Salgono tutti e tre sulla bilancia e inseriscono la moneta.
  La bilancia segna un peso di 117 kg. Per un pelo! Infatti la portata massima della bilancia è 120 kg.
  Scende A e l'ago scende a 79 kg.
  Scende B e l'ago scende a 45 kg.
  Quanto pesa ciascuno dei tre ragazzi?

- **La bilancia e la frutta**
  Tre mele e una pera pesano quanto 10 prugne. Sei prugne e una mela pesano come una pera. Quante prugne sono necessarie per equilibrare una pera?

- **Le 3 palline**
  Si hanno 3 palline simili, una delle quali pesa leggermente di più delle altre. Come trovarla con una pesata comparativa su una bilancia a bracci uguali e senza pesi?

- **Le 27 palline**
  Si hanno 27 palline simili, una delle quali pesa leggermente di più delle altre. Come trovarla con tre pesate comparative su una bilancia a bracci uguali e senza pesi?

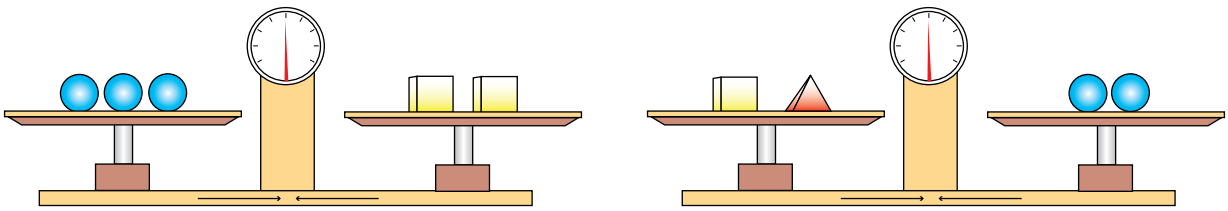
3ª FASE

Le bilance si possono usare anche per formulare delle situazioni problematiche che stimolano e rafforzano il ragionamento.
Per risolvere i seguenti problemi bisogna tenere presente che:

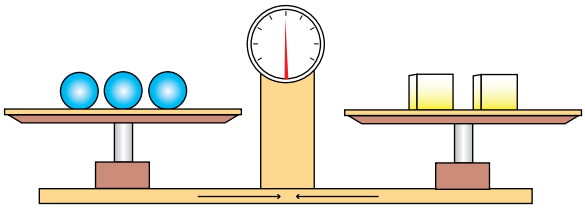
– la bilancia è in equilibrio quando sui due piatti c'è lo stesso peso.

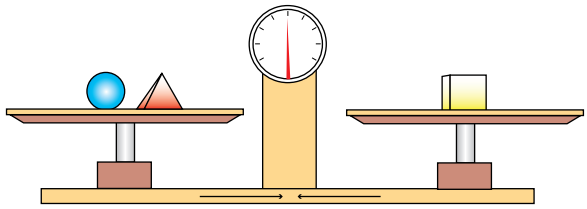
– In ogni situazione problematica lo stesso solido rappresenta lo stesso peso e solidi diversi rappresentano pesi diversi (la grandezza dei solidi non si deve considerare).

a) Qual è l'oggetto più leggero?

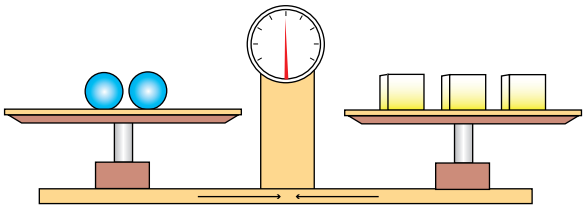


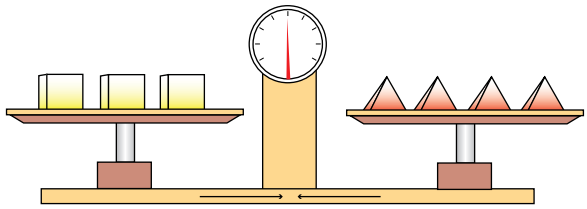
b) Qual è l'oggetto più pesante?



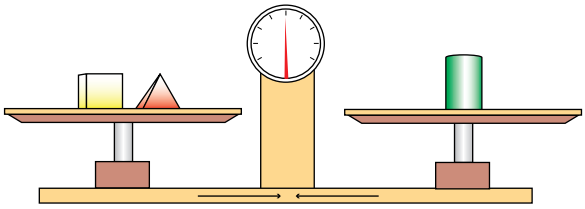


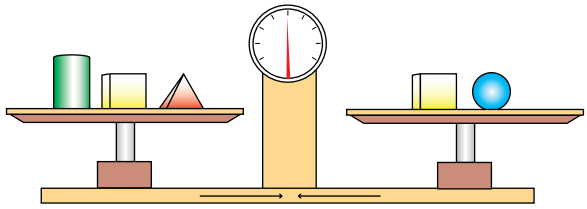
c) Qual è l'oggetto più leggero?



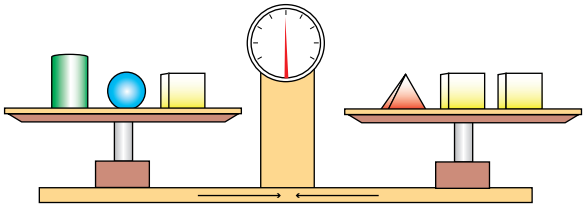


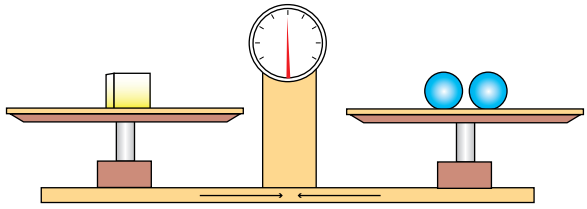
d) Qual è l'oggetto più pesante?



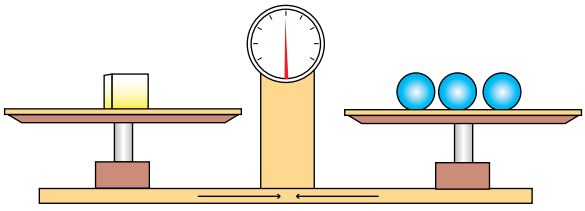


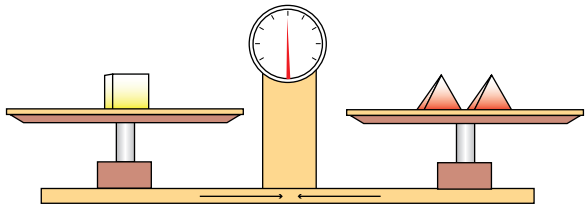
e) Pesa di più il o la ?



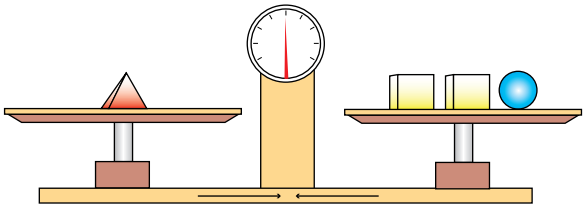


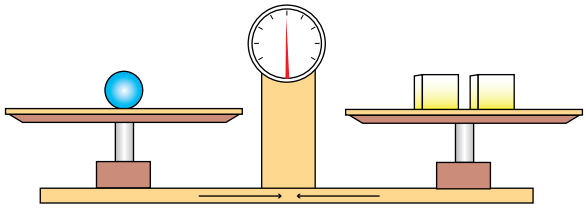
f) Qual è l'oggetto più leggero tra il cubo, la sfera e la piramide?



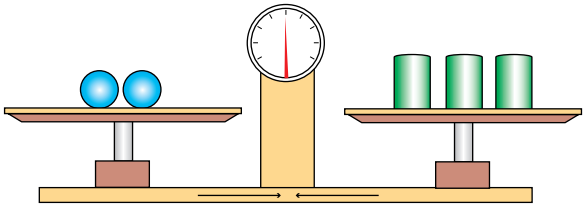


g) Qual è l'oggetto più pesante tra il cubo, la sfera e la piramide?

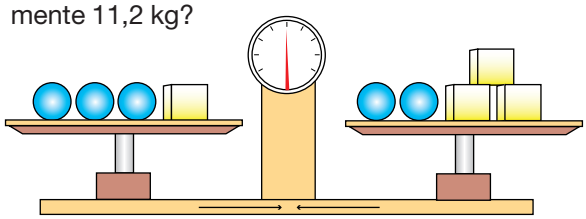




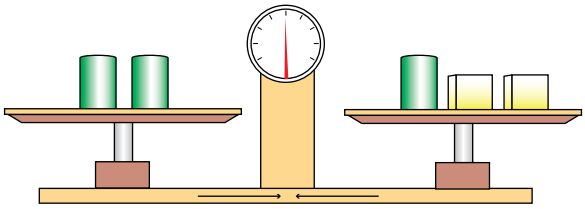
h) Quanto pesa una sfera se i tre cilindri complessivamente pesano 600g?



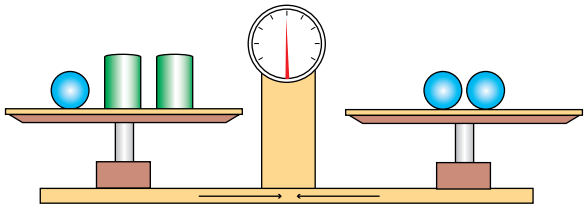
i) Quanto pesa una sfera e quanto pesa un cubo se tutte le sfere e tutti i cubi pesano complessivamente 11,2 kg?



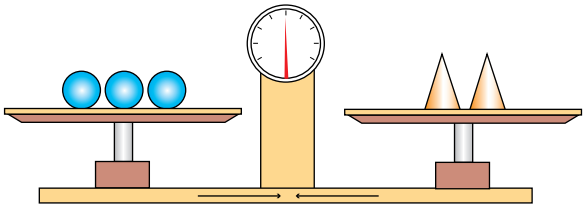
l) Quanto pesa un cubo se tutti i cilindri e tutti i cubi pesano complessivamente 24 kg?

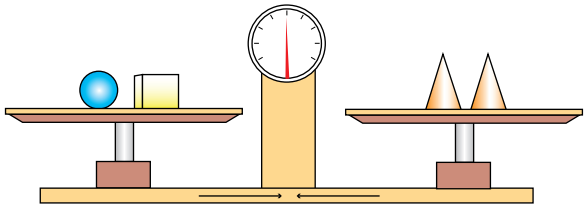


m) Quanto pesano complessivamente le sfere e i cilindri se un cilindro pesa 70 g?

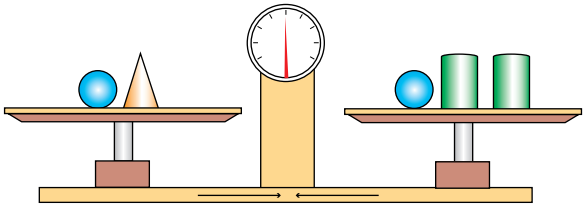


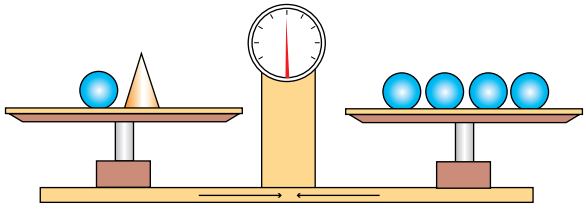
n) Tre sfere pesano come due coni e una sfera più un cubo pesano come due coni. Se il cubo pesa 150 grammi, quanto pesa una sfera e quanto un cubo?





o) Una sfera pesa 110 g. Quanto pesa un cilindro? Quanto pesa un cono?





Risposte e riflessioni

- **Dividere lo zucchero**
  1ª pesata: si dividono i 1800 grammi in due parti di 900 g ciascuna.
  2ª pesata: una parte di 900 g si divide in due parti di 450 g ciascuna.
  3ª pesata: utilizzando i due pesi (40 + 10 = 50 g) si tolgono 50 g da una delle parti da 450 g, la quale rimane da 400 g. Il resto dello zucchero pesa 1400 g.

- **Con soli 4 pesi**
  Osserviamo dapprima che se abbiamo un insieme di pesi che ci permette di pesare da 1 a n chilogrammi, allora con un nuovo peso $p=2n+1$ kg possiamo arrivare a pesare fino a $3n+1$ kg.
  – Poniamo quindi: $3n+1 = 40$ e otteniamo:
    $n = 13$
    $p = 2n+1 = 27$
    Il quarto peso è 27 kg e gli altri tre devono permetterci di pesare da 1 a 13 kg.
  – Poniamo allora: $3n+1 = 13$ e otteniamo:
    $n = 4$
    $p = 2n+1 = 9$
    Il terzo peso è 9 kg e gli altri due devono permetterci di pesare da 1 a 4 kg.

  Procedendo analogamente, troviamo che gli ultimi due pesi sono di 3 e 1 kg.
  In definitiva, i quattro pesi cercati sono: 1, 3, 9, 27 kg.

- **Monete false (un vero classico)**
  È sufficiente pesare un mucchio di monete così formato:
  1 moneta dal primo pacchetto;
  2 monete dal secondo pacchetto;
  3 monete dal terzo pacchetto;
  ... e così via...
  10 monete dal decimo pacchetto.

  Se tutte le monete fossero buone, il mucchio peserebbe:
  10 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 550 g
  Se manca 1 g allora le monete false si trovano nel primo pacchetto.
  Se mancano 2 g allora le monete false si trovano nel secondo pacchetto.
  Se mancano 3 g allora le monete false si trovano nel terzo pacchetto.
  ...
  Se mancano 10 g allora le monete false si trovano nel decimo pacchetto.

- **Monete di cioccolato avvelenate**
  Prendiamo:
  – 1 moneta dal primo sacchetto
  – 2 dal secondo
  – 4 dal terzo
  – 8 dal quarto
  – 16 dal quinto
  – 32 dal sesto
  Pesiamo tutte le 63 monete assieme.

  Se fossero tutte buone dovrebbero pesare 630 g.
  Le monete di cioccolato avvelenate fanno aumentare il peso di 1 g ciascuna.
  Ciascun sacchetto dà un aumento di peso che permette di individuarlo univocamente.

  Ad esempio:
  – se pesano 1 g in più, allora le monete avvelenate stanno solo nel sacchetto 1;
  – se pesano 2 g in più, stanno solo nel sacchetto 2;
  – se pesano 3 g in più, stanno nei sacchetti 1 e 2;
  – se pesano 13 g in più, stanno nei sacchetti 1, 3, 4 perché 13 può essere ottenuto in un solo modo, sommando numeri presi dalla sequenza 1, 2, 4, 8, 16, 32, e cioè: 1 + 4 + 8. Tali numeri corrispondono ai sacchetti 1, 3, 4;
  – e così via.

- **Risparmiare soldi con la bilancia automatica**
  117 – 79
  79 – 45
  45

- **La bilancia e la frutta**
  Immaginiamo di mettere tutti i frutti su una bilancia:
  3 mele + 1 pera + 6 prugne + 1 mela = 10 prugne + 1 pera

  Togliamo 6 prugne e 1 pera da entrambi i piatti. La bilancia rimarrà in equilibrio.
  4 mele = 4 prugne

  Deduciamo che una mela pesa tanto quanto una prugna.
  Sostituiamo nel secondo dato del problema le mele con altrettante prugne.
  6 prugne + 1 prugna = 1 pera
  7 prugne = 1 pera

  Quest'ultima è la risposta.

- **Le 3 palline**
  Si confrontano due palline a caso.
  Se la bilancia rimane in equilibrio, la pallina più pesante è la terza.
  Se la bilancia non rimane in equilibrio, si può individuare qual è la pallina più pesante.

- **Le 27 palline**
  – Prepariamo tre gruppi di 9 palline ciascuno.
    1ª pesata: confrontando due di questi gruppi possiamo individuare in quale dei tre gruppi (di 9 palline) si trova la pallina più pesante.
  – Prendiamo il gruppo incriminato e dividiamolo in tre gruppi di 3 palline ciascuno.
    2ª pesata: confrontando due di questi gruppi possiamo individuare in quale dei tre gruppi (di 3 palline) si trova la pallina più pesante.
  – Prendiamo il gruppo incriminato e dividiamolo in tre gruppi di 1 pallina ciascuno.
    3ª pesata: confrontando due di queste palline possiamo **individuare qual è la pallina più pesante.**

Schede storiche e curiosità

Archimede: sfera e cilindro

http://www.matematicamente.it /storia/archimede_sfera_cilindro.htm

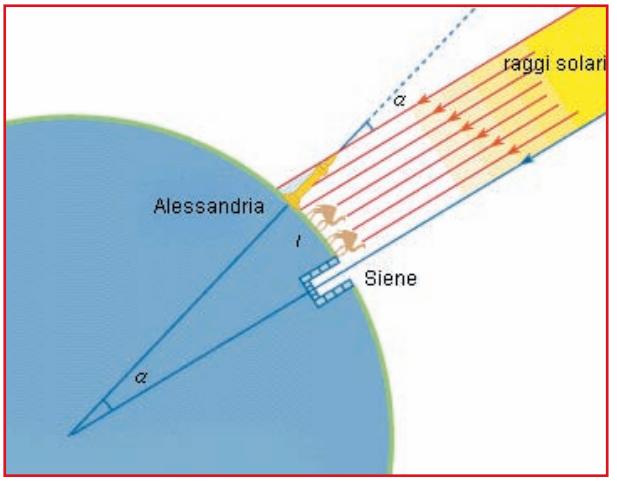
Il problema del rapporto tra volume della sfera e volume del cilindro circoscritto alla sfera è ritornato di attualità da quando nell'esame di stato per la maturità scientifica PNI del 2001 è stato chiesto di "Provare che una sfera è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto". Chi conosce un po' di storia della matematica si ricorderà della famosa tomba di Archimede sulla quale lo scienziato siracusano aveva voluto che si scolpisse una sfera e un cilindro.

"Quando ero questore in Sicilia mi misi a cercare la sua tomba invasa dalle erbe e dagli sterpi, che i siracusani non conoscevano e anzi negavano che esistesse. Avevo infatti sentito parlare di alcuni versi incisi sulla tomba che spiegavano perché essa fosse sormontata da una sfera e da un cilindro. Fuori da Porta Agrigentina c'è un gran numero di sepolture, e a forza di cercare e di guardare notai finalmente una piccola colonna che a pena superava la boscaglia di sterpi, e su di essa erano raffigurati una sfera e un cilindro". (*Marco Tullio Cicerone, Tusculanae Disputationes, V, 2*)

Il metodo di Eratostene

http://www.vialattea.net/eratostene/cosmimetria/metodo.htm

Eratostene sapeva che a Siene (l'attuale Assuan, che si trova a circa 800 km a sud-est di Alessandria), in un momento preciso dell'anno, il Sole illuminava il fondo dei pozzi. Questo evento si ripeteva ogni anno a mezzogiorno del solstizio d'estate e dipendeva dal fatto che i raggi del Sole cadevano verticalmente. In quel momento, un bastoncino piantato verticalmente a terra non avrebbe proiettato nessuna ombra. Egli notò che ad Alessandria, dove egli viveva, nello stesso giorno e alla stessa ora i raggi del Sole non erano perpendicolari ma formavano un angolo di 7,2° con la verticale.
Eratostene assunse, correttamente, che la distanza del Sole dalla Terra fosse molto grande e che quindi i suoi raggi fossero praticamente paralleli quando raggiungono la superficie terrestre. Inoltre considerava che la Terra dovesse avere forma sferica.
La differenza di inclinazione di 7,2° dipende dalla curvatura della superficie terrestre che cambia il punto di vista dal quale gli abitanti delle due città vedono il Sole.

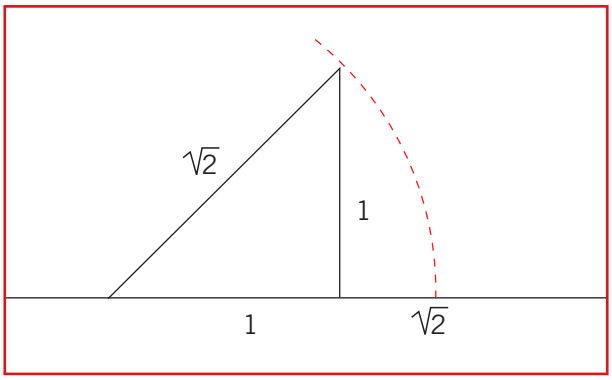


Egli ragionò in questo modo: l'angolo di 7,2° è congruente all'angolo che ha per vertice il centro della Terra e i cui lati passano rispettivamente per Alessandria e Siene (infatti sono angoli corrispondenti). Si tratta quindi di una "distanza angolare" tra le due città, pari a un cinquantesimo dell'angolo giro.
Ciò significa anche che la distanza "effettiva" tra le due città (ritenuta di 5 000 stadi) è un cinquantesimo della circonferenza terrestre. Eratostene moltiplicò per 50 questo valore, ottenendo 250 000 stadi: **la prima misura scientifica della circonferenza terrestre**. A quel tempo la stima di distanze così grandi, misurate a passi, era sicuramente molto imprecisa; inoltre è molto difficile stabilire una corri-

spondenza esatta tra lo stadio e il metro attuale. Di conseguenza non è facile determinare il margine di errore dei risultati ottenuti da Eratostene. La lunghezza dello stadio greco è una misura molto incerta, variando dai 154 metri ai 215 metri. Secondo le opinioni più accreditate, lo stadio usato da Eratostene corrispondeva a 185 metri attuali: ne risulterebbe così una circonferenza terrestre di 46 250 km, un dato che, nonostante superasse di oltre 6 000 km la misura accettata attualmente, era comunque molto buono, tenuto conto dell'imprecisione degli strumenti utilizzati e delle conoscenze di quel tempo. Secondo altri autori, Eratostene arrivò molto più vicino: lo stadio doveva essere lungo 157,5 metri e quindi la circonferenza calcolata da lui corrispondeva a 39 690 km, un dato di sconcertante attualità!

π è un numero irrazionale?

I numeri irrazionali, come per esempio $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$... corrispondono a numeri decimali illimitati senza periodo. Questi numeri furono chiamati irrazionali quasi a voler dire "non calcolabili" appunto perché hanno infinite cifre dopo la virgola.
Anche π è un numero decimale illimitato senza periodo, tuttavia è diverso dai numeri irrazionali. Ecco in che cosa consiste la diversità: un segmento lungo $\sqrt{2}$ si può costruire utilizzando riga e compasso e così anche tutti gli altri numeri irrazionali.



Facendo uso di questi strumenti però non si riesce a costruire un segmento che abbia esattamente la lunghezza π.
π e altri numeri della stessa natura sono ancora più "non calcolabili" dei numeri irrazionali perciò furono chiamati **trascendenti,** quasi a voler dire che "trascendono", cioè vanno oltre i limiti della comprensione.
Oggi, con l'uso dei calcolatori, è possibile calcolare milioni di cifre decimali di π. Lo scopo di ricercare un numero sempre maggiore di cifre decimali non è solo per pura curiosità, ma per il desiderio di trovare, tra milioni di cifre, un qualche tipo di regolarità.

Leonhard Euler

Leonhard Euler (Basilea, 15 aprile 1707 – San Pietroburgo, 18 settembre 1783), noto in Italia come Eulero, è considerato il più importante matematico dell'illuminismo. Allievo di Johann Bernoulli, Eulero viene considerato il matematico più prolifico di tutti i tempi.
Nel 1727 fu chiamato all'Accademia di San Pietroburgo, dove fu nominato professore di Fisica a soli 23 anni. Nel 1741 fu chiamato da Federico II di Prussia, cioè Federico il Grande, a Berlino, dove operò presso l'Accademia delle Scienze fino al 1766. In questa data lasciò Berlino, anche per le interferenze di Federico il Grande sul suo lavoro, per tornare negli ultimi anni della sua vita a San Pietroburgo.
Complessivamente esistono 886 pubblicazioni di Eulero. Secondo Wikipedia ci vorrebbero otto ore al giorno per 50 anni per copiare tutte le sue opere a mano. Ed Eulero, che perse la vista per aver osservato troppo a lungo il Sole, scrisse quasi metà della sua produzione teorica negli ultimi diciassette anni della sua vita, nonostante la cecità.
Buona parte della simbologia matematica tutt'ora in uso venne introdotta da Eulero, per esempio $f(x)$ per indicare una funzione (matematica). In particolare a lui si deve l'utilizzazione di schemi grafici per rappresentare i rapporti logici. Questi grafi vengono chiamati "diagrammi di Eulero" o anche "diagrammi di Eulero-Venn".
Una curiosità: il Sudoku deriva da un quadrato latino di Eulero. Il quadrato latino, che Eulero definiva un nuovo tipo di "quadrato magico" (nel quale i numeri sono disposti in modo che le somme dei valori di ciascuna riga, colonna o diagonale risultino sempre uguali) si usa nella progettazione di esperimenti.
Il più semplice quadrato latino è:

12
21

Eulero certo non poteva immaginare che quasi tre secoli dopo sarebbe diventato famoso perché una variante del suo quadrato latino si è diffusa nel mondo dell'enigmistica con la rapidità di un virus informatico.

La tormentata storia dei numeri col segno

I numeri relativi, quelli col segno, per intenderci, hanno faticato non poco per affermare la loro identità in campo matematico. I matematici antichi non ne avevano bisogno in quanto dovevano risolvere

problemi legati a grandezze geometriche e comunque a grandezze positive; così sia i Babilonesi, sia gli Egizi, pur avendo fatto diverse scoperte nel campo della matematica, non ci hanno lasciato nessuna testimonianza circa la conoscenza o meno di questo tipo di numeri.
Sarà il matematico greco Diofanto (VI sec. a.C.) a parlare per primo di quantità negative, anche se non annovera tra i numeri e non ritiene sensate le equazioni che ammettono soltanto soluzioni negative.
Bisognerà aspettare il 600 d.C. quando l'indiano Brahmagupta fa una prima presentazione organica delle operazioni con le quantità negative, descrivendo le somme e le differenze di crediti e debiti.
Sarà in seguito un altro matematico indiano a generalizzare le operazioni con i numeri con segno.
Gli Arabi, che conoscevano le opere matematiche degli Indiani e le diffusero in Europa, non accettavano i numeri negativi come soluzioni delle equazioni.
Sarà Leonardo Pisano, vissuto tra il XII e il XIII secolo, il primo europeo a considerare i numeri col segno come indicativi di debiti, ma anche lui non li accettava come soluzioni delle equazioni.
Anche altri matematici vissuti in epoche successive, pur utilizzando ed operando con i numeri negativi, non riuscivano ad accettarli come soluzioni delle equazioni: tra questi Cardano, il Bombelli e pure Cartesio, che pure utilizzava i numeri col segno per rappresentare segmenti orientati.
Il XVII secolo è quello che vede un primo riconoscimento di questi numeri come soluzioni delle equazioni e ciò permise di risolvere problemi sino ad allora ritenuti impossibili.
Ancora nel secolo successivo permanevano però alcune perplessità nei confronti dei numeri negativi e qualche matematico si rifiutava di utilizzarli.

Curiosità sui segni + – · : e linea di frazione

Tutti voi conoscete come, in matematica, le parole *più, meno, per, diviso, fratto* si indicano convenzionalmente, nell'ordine, con i segni *+; –; ·; :;* — (linea di frazione).
Vi siete mai chiesti, un po' per curiosità, quando comparvero e si usarono tali convenzioni di scrittura? Se vi siete posti un interrogativo del genere meritate una risposta, che certamente ci riporta indietro nel tempo. Infatti dobbiamo andare circa nel XV, XVI, XVII sec. d.C. Perché questi secoli così diversi? La spiegazione è semplice, anche se può sembrare banale: perché le varie convenzioni di scrittura non vennero introdotte contemporaneamente, per lo meno per quanto riguarda testimonianze scritte, fino a noi giunte. Perché in questi secoli e non prima? Perché dovete pensare che anticamente, prima dell'invenzione della stampa, la composizione di opere scritte di qualunque genere era affidata ad amanuensi, a uomini dotti della Chiesa che si dedicavano all' *"arte della scrittura"* quasi a creare opere artistiche, scrivendo a mano ed in "bella calligrafia". Una volta inventata la stampa, si cercarono caratteri più semplici, meno ricchi di "fronzoli" e tali da essere universalmente capiti da tutti i lettori.
Se non siete convinti vediamo alcune testimonianze scritte a noi giunte e cerchiamo in questa o quell'opera scritta i segni +, –, ·, :, —. Ebbene li troviamo nei seguenti secoli diversi:
XV sec. d.C: un'opera a stampa di un certo *J. Widmann* (nato verso il 1460, forse tipografo?), la *"Behende und hubsce Rechenung Leipczick 1489"* ("Calcolo svelto e vezzoso"), riportò i simboli + e –;
XVI sec. d.C.: il matematico e astronomo inglese *Thomas Harriot* (1560-1621) adottò il simbolo . fra numeri e lettere; oltre a ciò adottò anche i simboli < per indicare "minore" e > per indicare "maggiore"; il simbolo × si ritiene aver origine dalla disposizione dell'operazione a crocetta;
XVII sec. d.C. un testo di *Johnsons, "Arithmetic" London 1633*, 2a edizione, riportò il simbolo : (due punti).

Il papiro di Rhind

Il *papiro di Rhind*, dal nome dell'antiquario scozzese che lo acquistò a Luxor nel 1858 e lo rivendette al British Museum dove è tuttora conservato, è il più importante documento dell'antico Egitto oggi noto.

Il papiro viene anche detto "di Ahmes" in onore dello scriba che lo aveva trascritto verso il 1650 a.C. ed è una striscia larga circa 30 cm e lunga circa 5,46 m. In esso lo scriba ci informa che il contenuto è tratto da un esemplare risalente al Regno Medio e composto tra il 2000 e il 1800 a.C. È scritto sui due lati: in uno vi sono tabelle numeriche, nell'altro lato sono riportati 87 problemi completamente risolti. I problemi riguardano per lo più questioni pratiche di divisioni di vettovaglie in parti uguali o proporzionali, trasformazioni di grano e orzo in pane o birra.

Alcuni di questi problemi sono attualmente indicati come **problemi del mucchio**, dal termine egiziano *aha* che significa mucchio, cumulo, con il quale è designata la quantità da determinare.
Tali problemi corrispondono alla risoluzione di **equazioni di primo grado**. La soluzione, descritta a parole e non in termini simbolici, si trova attribuendo all'incognita, cioè al mucchio, un valore opportuno, che probabilmente è falso, e su questo valore si eseguono le operazioni indicate a sinistra del segno di uguaglianza. Il risultato è poi confrontato con quello desiderato e, ricorrendo all'uso della proporzione, si trova la risposta esatta.
Consideriamo il seguente esempio:
"Un mucchio e la sua quarta parte aggiunti insieme diventano 15".
Nel testo egiziano si attribuisce inizialmente il valore 4 al mucchio, scelto in modo arbitrario ma opportuno: infatti la quarta parte di 4 è 1. Poi si calcola 4 più un quarto di 4 e si ottiene 5 invece del risultato richiesto 15, quindi si ricorre all'uso della proporzione 4 : mucchio = 5 : 15 e si ricava il risultato 15 x 4 : 5 = 12.
Si conclude che "il mucchio è 12, il suo quarto è 3, totale 15".

Equazioni

Impostazioni di *equazioni* tra i matematici dell'antica Grecia sono giunte fino a noi grazie a testimonianze scritte o leggende.
Ci sembra abbastanza interessante prendere in considerazione due matematici dell'Ellade, quali Pitagora (580 o 586-500 a.C.), la cui figura è avvolta nella leggenda, e Diofanto di Alessandria (580-501 a.C.) matematico e ricercatore.
Di Pitagora si narra che una volta il tiranno di Samos, Policrate, gli domandasse il numero dei suoi allievi. Argutamente il grande saggio rispose:
"La metà studia le belle scienze matematiche; l'eterna Natura è l'oggetto dei lavori di un quarto; un settimo si esercita al silenzio ed alla meditazione; vi sono inoltre tre donne".
Volete provare a calcolare il numero degli allievi di Pitagora? Ebbene indicate con x il numero degli allievi e seguendo le indicazioni date dal grande studioso scrivete:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3=x$$

Risolvete questa semplice equazione algebrica di primo grado intera e troverete x = 28. Facile no! Chissà se lo fu per il tiranno Policrate!

Di Diofanto ci rimane la seguente testimonianza scritta, il suo epitaffio:
126. Metrodoro. Una vita
C'è nella tomba Diofanto. Che grosso prodigio!
La tomba abilmente misura la sua vita;
volle un dio che l'infanzia durasse un sesto,
ed aggiunse per il pelo alle gote un dodicesimo.
Dopo una settima parte la face gli accese di nozze;
cinqu'anni dopo un figlio gli concesse.
Povero figlio diletto! Fu arso quel gelido
corpo proprio a metà degli anni di suo padre.
Per consolare il lutto, quattr'anni costui nello studio
dei numeri passò, finché morì.

In questo scritto latino c'è l'impostazione di una semplice equazione di primo grado in una incognita: l'età di Diofanto.
Indicate con x l'età di Diofanto e scrivete:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{x}{2}+5+4=x$$

risolvetela e troverete che Diofanto visse 84 anni.

Il gioco della zara

Quando si parte il gioco della zara,
colui che perde si riman dolente,
ripetendo le volte, e tristo impara…
Dante, canto VI del Purgatorio

In questi versi alcuni commentatori hanno voluto riconoscere un richiamo al calcolo della probabilità. Si riferiscono **al gioco della zara**, un gioco di dadi (in arabo "dado" è "**zahar**", da cui il nome del gioco in questione) diffusissimo nel Trecento e che fu oggetto di insistenti e severi quanto inutili divieti degli stati comunali.
Si giocava gettando su un tavoliere tre dadi e il gioco consisteva nell'indovinare in anticipo i numeri risultanti dalle loro possibili combinazioni; 3, 4, 17 e 18 erano i numeri che avevano meno probabilità di uscire: il 3 e il 18 infatti hanno **una sola** probabilità di uscire sulle 216 possibilità (**probabilità classica**), il 4 e il 17 hanno probabilità di uscire **tripla** essendoci tre modi possibili diversi, per esempio il 4 si può avere con una delle seguenti combinazioni (1-1-2), (1-2-1), (2-1-1); il 10 e l'11 sono i numeri che invece hanno probabilità maggiori di uscire.
Si può facilmente intuire la ragione che determinò nel gioco la regola dell'esclusione dei numeri 3, 4, 17 e 18, dal momento che qualsiasi giocatore non sprovveduto, seppur privo di una conoscenza corretta del calcolo della probabilità, non avrebbe mai puntato su quei numeri poiché la semplice esperienza (**probabilità frequentista**) o una corretta valutazione sulle modalità possibili delle terne di numeri, mettevano in risalto che quei numeri uscivano, e non potevano che uscire, molto più raramente degli altri; da qui l'inutilità di considerarli parte del gioco.

Per prepararti alla prova nazionale

1. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Risolvere problemi relativi a successioni di elementi

Letizia compra una scatola di perline colorate con le quali vuole realizzare una collana.
Intende iniziare la collana con una perlina gialla, poi aggiungerne tre rosse, due blu e poi ancora tre rosse e ripetere questa sequenza base per 10 volte.
Quante perline di ogni colore serviranno a Letizia?
In quale sequenza ritroverà la dodicesima pallina blu?

2. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Risolvere problemi relativi a successioni di elementi

Una cassiera di un supermercato lavora quattro giorni consecutivi e riposa il quinto. Se oggi è domenica ed è il suo giorno di riposo, quanti giorni lavorativi dovranno passare affinché il giorno di riposo della cassiera sia ancora domenica?

A 34 **B** 28 **C** 30 **D** 26

3. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Utilizzare il significato di media

Dieci è la media aritmetica di 10 diversi numeri interi positivi. Quanto può valere al massimo il maggiore tra questi numeri?

A 46 **B** 50 **C** 55 **D** 91

4. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Risolvere problemi relativi a successioni di elementi

Paolo è in grado di gonfiare 6 palloncini ogni due minuti, ma uno su dieci scoppia subito dopo essere stato gonfiato. Qual è il numero massimo di palloncini gonfiati da Paolo in un'ora?

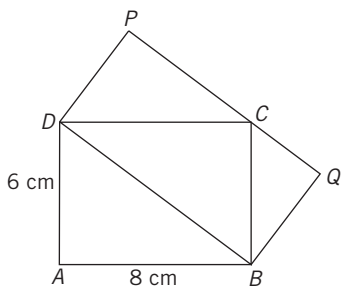
A 163 **B** 160 **C** 180 **D** 162

5. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Utilizzare le percentuali

Il 50% degli studenti di una scuola secondaria di primo grado gioca a calcio. Di essi il 30% gioca anche a pallavolo. Quale percentuale degli studenti gioca sia a calcio che a pallavolo?

6. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Risolvere problemi utilizzando le formule per calcolare le aree

Nella seguente figura sono raffigurati due rettangoli: *ABCD* e *BDPQ*.
Se *AD* e *AB* misurano rispettivamente 6 cm e 8 cm, quanto misura l'area del rettangolo *BDPQ*?



A 40 cm^2 **B** 48 cm^2 **C** 56 cm^2 **D** 64 cm^2

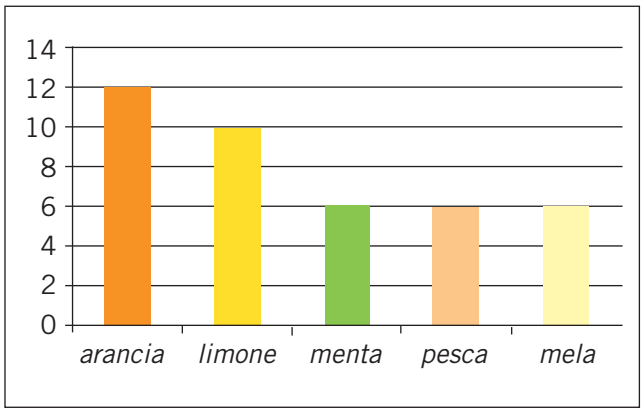
7. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Risolvere problemi utilizzando frazioni

Carlo e i suoi quattro amici si dividono in questo modo la somma vinta all'enalotto: a Carlo spetta $\frac{1}{4}$ dell'intera somma vinta e il rimanente viene diviso in parti uguali tra gli altri. Quale frazione spetta ad ognuno dei quattro amici di Carlo?

A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{3}{16}$ **C** $\frac{3}{8}$ **D** $\frac{1}{6}$

8. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Calcolare la probabilità di un evento

Il seguente grafico mostra il numero di caramelle di diversi gusti contenuti in una confezione.

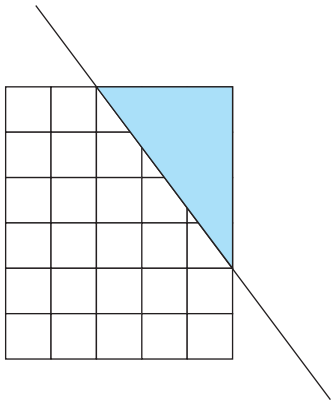


Prendendo una caramella a caso, qual è la probabilità di scegliere una caramella al limone?

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{5}$ **D** $\frac{2}{5}$

9. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Determinare percentuali

Un foglio a quadretti di forma rettangolare viene tagliato come è indicato nella figura a lato. Quale percentuale della superficie del foglio è rimasta?



A 70% **B** 75% **C** 80% **D** 60%

10. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Determinare numeri che soddisfano determinate condizioni

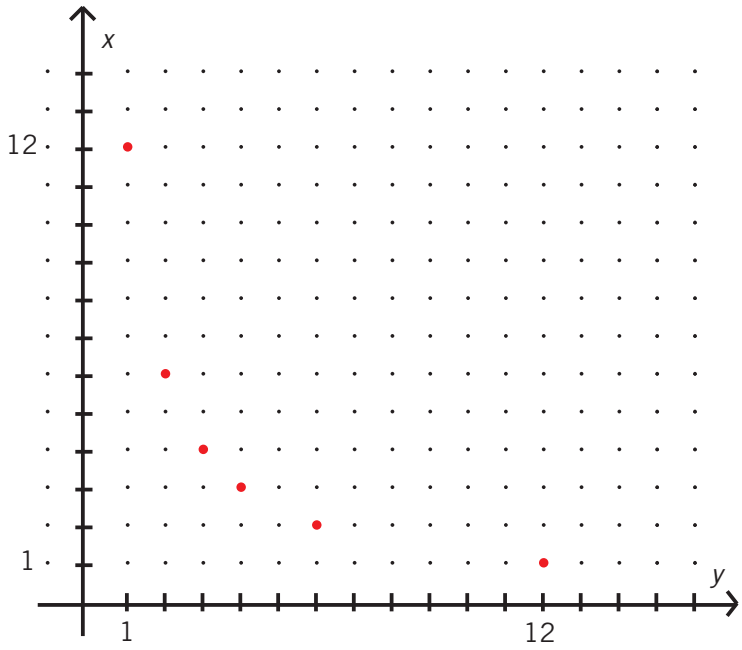
Se n è un numero compreso tra 10 e 13, allora il numero $(n + 7)$ tra quali numeri è compreso?

A 3 e 6 **B** 16 e 19 **C** 20 e 23 **D** 17 e 20

11. **Tipologia:** Relazioni e funzioni
Abilità: Associare una funzione ad un grafico

Se x e y sono numeri interi, quale tra le seguenti relazioni è rappresentata dai punti disegnati nel grafico

A $x + y = 12$ **B** $4x + y = 12$ **C** $xy = 12$ **D** $y = 12x$



12. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Confrontare numeri relativi

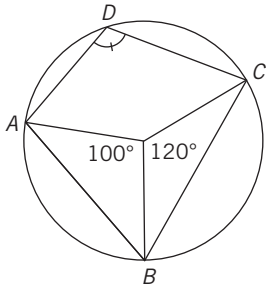
Quale tra le seguenti disuguaglianze è vera?

A $-\frac{12}{13} > +\frac{13}{12}$ **B** $-\frac{12}{13} > -\frac{13}{12}$ **C** $-\frac{13}{12} > +\frac{12}{13}$ **D** $+\frac{13}{12} < +\frac{12}{13}$

13. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Determinare le ampiezze di angoli di quadrilateri inscritti

Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza. Quanto misura l'angolo $A\hat{D}C$?

A 140° **B** 120° **C** 100° **D** 110°



14. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Operare con le frazioni

Una bottiglietta da $\frac{1}{2}$ litro è piena per $\frac{3}{4}$. Quanti centilitri di liquido conterrà dopo aver versato in un bicchiere 30 centilitri?

A 7,5 **B** 12,5 **C** 6,5 **D** 9,5

15. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Utilizzare il significato di percentuale

Quale numero aumenta del 500% quando lo si eleva al quadrato?

A 6 **B** 2 **C** 10 **D** 5

16. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Calcolare la probabilità di un evento

Lanciando un dado non truccato, con le facce numerate da 1 a 6, quale dei seguenti eventi è più probabile?

A numeri ≤ 3 **B** numeri pari **C** numeri ≥ 2 **D** numeri < 5

17. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Individuare permutazioni

Una locomotiva traina un treno di cinque vagoni: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. In quanti modi si possono accostare i vagoni se la locomotiva deve risultare sempre più vicina al vagone *A* che al vagone *B*?

A 45 **B** 90 **C** 120 **D** 60

18. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Utilizzare il significato di percentuale

Un giardiniere vuole ampliare l'aiuola rettangolare di un giardino. Decide di allargarla aumentando del 20% sia la lunghezza che la larghezza. Di quanto aumenta l'area dell'aiuola rispetto all'area iniziale?

A 42% **B** 44% **C** 40% **D** 24%

19. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Risolvere problemi utilizzando il M.C.D.

Giuseppe ha 54 palline blu e 90 palline gialle. Vuole distribuirle in scatole, in modo che in ogni scatola ci siano palline tutte dello stesso colore e che il numero delle palline sia lo stesso per ogni scatola. Qual è il minimo numero di scatole che gli consente di eseguire l'operazione?

A 36 **B** 8 **C** 9 **D** 16

20. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Utilizzare il significato di media

La media dell'età della mamma, del papà e dei tre figli è 25 anni. L'età media dei tre figli è 12 anni. Qual è l'età del papà se ha 5 anni più della mamma?

A 41 **B** 44 **C** 40 **D** 47

21. **Tipologia:** Relazioni e funzioni
Abilità: Individuare relazioni nei triangoli

Se si raddoppiano sia la base che l'altezza di un triangolo, come variano il perimetro e l'area?

A Raddoppiano sia il perimetro che l'area

B Non cambiano sia il perimetro che l'area

C Il perimetro raddoppia e l'area quadruplica

D Il perimetro quadruplica e l'area raddoppia

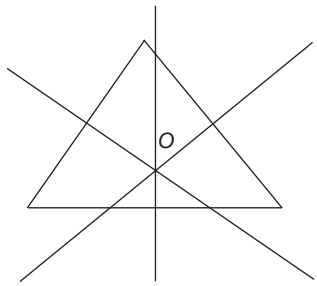
22. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Confrontare numeri

Tra i seguenti numeri qual è il minore?

A $\left(\frac{3}{16}\right)^2$ **B** $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ **C** $(0{,}8)^2$ **D** $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

23. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Individuare punti notevoli nei triangoli

Il punto d'incontro degli assi (circocentro) del triangolo disegnato è *O*. Disegna un triangolo rettangolo ed indica il circocentro.



24. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Operare con le potenze

Partendo dal numero 2, come è possibile ottenere il numero 64 utilizzando le seguenti operazioni:
– elevazione al cubo;
– divisione per 8.

25. **Tipologia:** Geometria
Abilità: a) calcolare ampiezze di angoli; b) individuare relazioni nei triangoli; c) applicare i criteri di congruenza dei triangoli

Osserva il seguente rettangolo *ABCD*. Congiungendo il punto interno *P* con i vertici si ottiene il triangolo equilatero *DCP* e il triangolo isoscele *APB,* il cui angolo al vertice è ampio 120°.

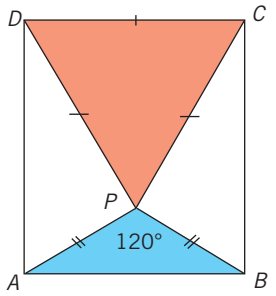
Rispondi.

a) Quanto è ampio l'angolo $D\hat{P}C$?
Quanto è ampio l'angolo $A\hat{P}D$?

A 45° **B** 60° **C** 90° **D** 100°

b) Quale relazione intercorre tra il segmento *AP* e il segmento *AD*?
c) I triangoli *APD* e *BPC* sono congruenti?

Motiva la risposta.



26. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Risolvere problemi utilizzando le formule del cono

Con uno stampo si vuole produrre una candela di cera a forma di cono, di volume 125π cm^3 . Quanto sarà alta la candela se il suo diametro di base è di 10 cm?

A 60 cm **B** 20 cm **C** 15 cm **D** 18 cm

27. **Tipologia:** Relazioni e funzioni
Abilità: Rappresentare graficamente relazioni tra grandezze

Rappresenta con un grafico la seguente situazione: un'automobile viaggia per un tratto in autostrada sempre alla stessa velocità media e poi per un altro tratto con accelerazione costante. Indica sull'asse *x* la variabile tempo (*t*) e sull'asse *y* la variabile velocità (*v*).

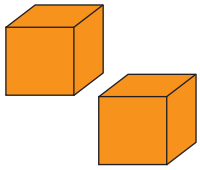
28. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Determinare il numero di combinazioni tra gli elementi di un insieme

Con le lettere A, T, G, C si indicano le basi azotate (Adenina, Timina, Guanina, Citosina) presenti nella molecola di DNA. Utilizzando queste quattro lettere quante sequenze di tre lettere (triplette) possiamo ottenere, ripetendo anche più volte una stessa lettera (ad esempio AAG oppure AAA)?

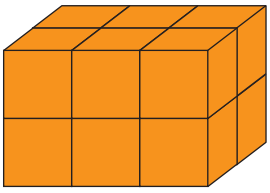
A 20 **B** 16 **C** 32 **D** 64

29. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Risolvere problemi utilizzando multipli di numeri

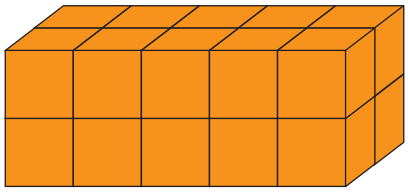
Si hanno a disposizione 175 cubi, tutti dello stesso tipo:



Con questi cubi si devono costruire due modelli di mattone: uno piccolo e l'altro grande.



modello piccolo



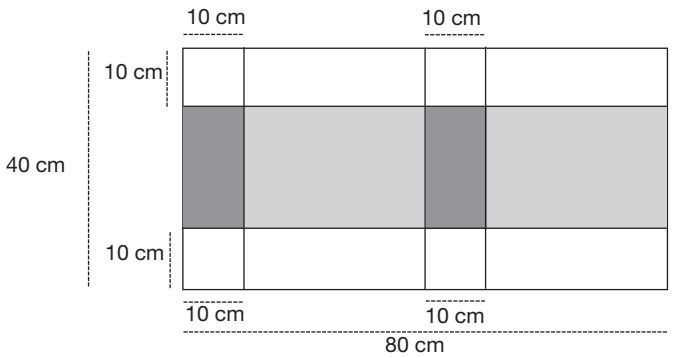
modello grande

Si deve utilizzare il massimo numero possibile dei 175 cubi. Quanti mattoni di ognuno dei due modelli si devono costruire affinché i cubi non utilizzati siano il minor numero possibile ? (***N.B.*** *ci sono tre soluzioni*)

..... mattoni piccoli e ..... mattoni grandi

30. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Risolvere problemi utilizzando le formule del parallelepipedo rettangolo

Lorenzo possiede un cartoncino di forma rettangolare le cui dimensioni sono 40 cm e 80 cm e con questo vuole costruire un parallelepipedo rettangolo. A tale scopo ha già fatto un disegno di tutte le facce del parallelepipedo e delle parti del cartoncino che non dovrà utilizzare per la costruzione.



a) Indica l'area della superficie totale del parallelepipedo rettangolo.

A 1600 cm^2 **B** 3200 cm^2 **C** 1400 cm^2 **D** 2200 cm^2

b) Indica il volume.

A 600 cm^3 **B** 8000 cm^3 **C** 6000 cm^3 **D** 4000 cm^3

31. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Risolvere problemi utilizzando espressioni numeriche

In un grattacielo di 80 piani è installato un ascensore che ha solo due pulsanti: il primo lo fa salire di 5 piani e il secondo lo fa scendere di 7.
Con questo ascensore e partendo dal 1° piano è possibile arrivare al 38°? In caso affermativo indica la sequenza di operazioni che consente di arrivare al 38° piano.

32. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Individuare disuguaglianze false

Sapendo che a è un numero naturale diverso da zero, quale tra le seguenti disuguaglianze è falsa?

A $2a > a$ **B** $a + a < 2a$ **C** $a - 1 < a$ **D** $3a \geq a + 2$

33. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Utilizzare la proprietà distributiva per risolvere un problema

Federico ha acquistato:
– n scatole di un certo alimento al costo di x euro
– n quaderni al costo di y euro.
Tra le seguenti, indica la procedura esatta per calcolare la spesa totale.

A $nx + y$ **B** $n \cdot (x + y)$ **C** $n + ny$ **D** $(n + x) \cdot (n + y)$

34. **Tipologia:** Relazioni e funzioni
Abilità: Individuare relazioni tra grandezze

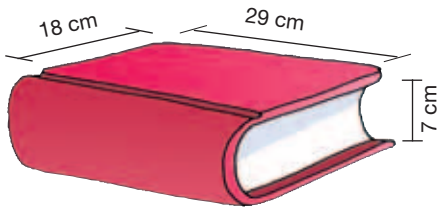
La seguente tabella esprime la relazione tra due grandezze x e y:

x	0	1	2	3
y	2	3	4	5

Quale tra le seguenti funzioni esprime la relazione tra x e y?

A $y = x + 1$ **B** $y + x = 4$ **C** $y = x - 2$ **D** $y = x + 2$

35. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Individuare relazioni geometriche



Qual è il numero massimo di libri lunghi 18 cm, alti 29 cm e spessi 7 cm che si possono sistemare in uno scaffale, sapendo che lo scaffale stesso è lungo 1,46 m, profondo 20 cm e alto 28 cm?

A 18 **B** 22 **C** 20 **D** 16

36. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Effettuare operazioni con numeri relativi

Qual è il numero intero relativo che sommato alla terza parte di – 9 dà – 8?

A – 4 **B** – 3 **C** + 5 **D** – 5

37. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Interpretare dati e calcolare la media

La seguente tabella riporta i dati relativi ai voti ottenuti in matematica dagli alunni di una classe terza di scuola secondaria di primo grado sulla scheda di valutazione del primo quadrimestre.

voto	N° alunni
4	5
5	8
6	7
7	2
8	2

a) Quanti alunni hanno avuto almeno 6 in pagella?

A 8 **B** 7 **C** 13 **D** 11

b) Qual è la media dei voti ottenuti dagli alunni della classe? Scrivi in che modo calcoli la media.

38. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Individuare il numero che è soluzione di una equazione

Qual è il valore di x che soddisfa l'equazione $4x + 1 - 2 \cdot (x - 1) = 4$?

A $\frac{1}{2}$ B $-\frac{1}{2}$ C 2 D $\frac{4}{3}$

39. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Risolvere problemi poste determinate condizioni

Un carico di 270 quintali viene distribuito in casse; il peso di ciascuna non supera 3,5 quintali. Qual è il numero minimo di camion necessario per trasportare l'intero carico se ciascun camion può trasportare al massimo 15 quintali?

A 19 B 20 C 18 D 21

40. **Tipologia:** Relazioni e funzioni
Abilità: Individuare relazioni tra gli elementi del parallelepipedo rettangolo

Gli spigoli di un parallelepipedo rettangolo misurano 5 cm, 7 cm, 3 cm. Se moltiplico per 3 la misura di ogni spigolo, che cosa succede alla superficie totale e al volume del parallelepipedo rettangolo?

A Raddoppia sia la superficie totale che il volume

B Triplica sia la superficie totale che il volume

C Raddoppia la superficie totale e triplica il volume

D La superficie totale aumenta 9 volte e il volume aumenta di 27 volte

41. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Determinare il rapporto tra aree di figure simili

a) Sono dati dei triangoli equilateri T e T_1 i cui lati misurano rispettivamente 10 cm e 30 cm. Qual è il rapporto tra l'altezza di T e T_1?

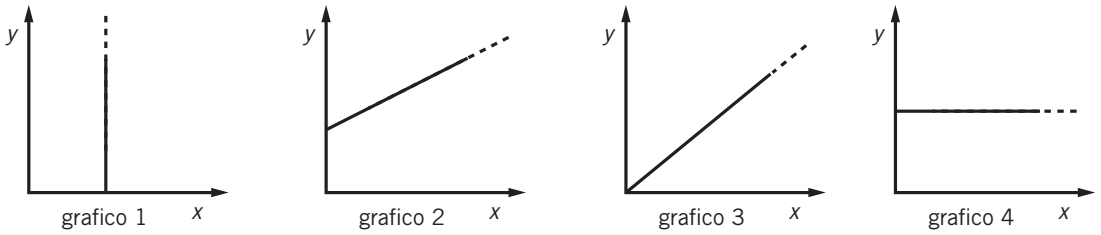
A $\frac{1}{9}$ B 3 C 9 D $\frac{1}{3}$

b) L'area di T è:

A $\frac{1}{3}$ di quella di T_1 B $\frac{1}{9}$ di quella di T_1 C 3 volte quella di T_1 D 9 volte quella di T_1

42. **Tipologia:** Relazioni e funzioni
Abilità: Associare un grafico ad una situazione

Un treno, mantenendo per un tratto sempre la stessa traiettoria rettilinea, viaggia a velocità costante. Osserva i seguenti grafici e rispondi alla domanda.

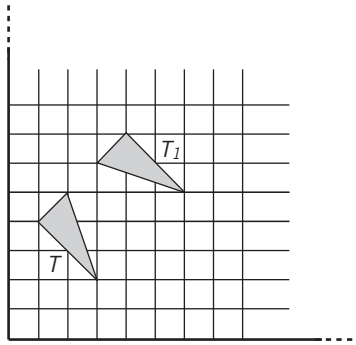


Quale grafico raffigura la velocità costante del treno (asse y) al variare del tempo (asse x)?

A Grafico 1 B Grafico 2 C Grafico 3 D Grafico 4

43. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Individuare l'asse di simmetria

I due triangoli T e T_1 si corrispondono in una simmetria assiale. Individua e traccia l'asse di simmetria.



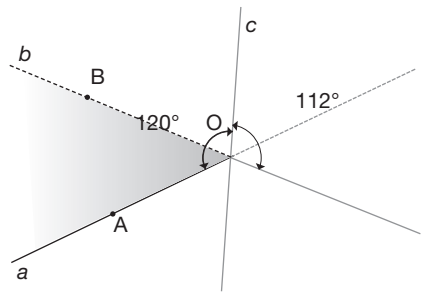
44. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Risolvere problemi conoscendo i rapporti tra gli angoli

In un triangolo ABC l'angolo in C è il triplo dell'angolo in B ed è metà dell'angolo in A.
Quanto misura, in gradi, l'angolo in C?

A 36° **B** 54° **C** 60° **D** 72°

45. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Determinare ampiezze di angoli

Nella figura a lato sono rappresentate tre rette a, b, c che si intersecano in un punto, formando angoli; le ampiezze di due di essi sono indicate in figura. Quanti gradi misura l'angolo $A\hat{O}B$?



A 51° **B** 52° **C** 58° **D** 54°

46. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Utilizzare il calcolo della probabilità

In un'urna sono contenute 40 sfere tutte uguali, ma di tre colori diversi: rosse, gialle, verdi.

a) Se la probabilità di estrarre una sfera rossa è $\frac{3}{8}$ e di estrarne una gialla è $\frac{2}{8}$, quante sono le sfere verdi?

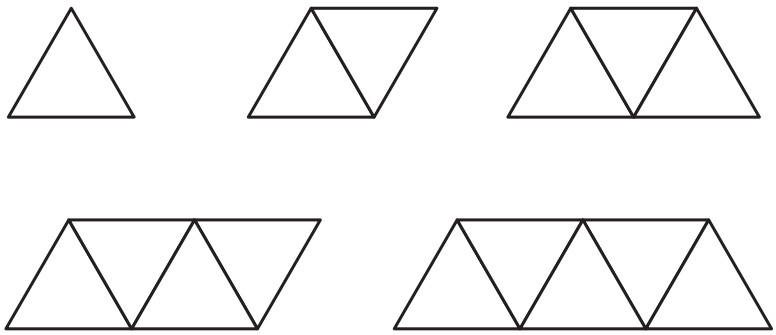
A 10 **B** 15 **C** 18 **D** 12

b) Qual è la probabilità di estrarre una sfera che non sia gialla?

A $\frac{5}{8}$ **B** $\frac{3}{8}$ **C** $\frac{2}{3}$ **D** $\frac{3}{4}$

47. Tipologia: Relazioni e funzioni
Abilità: Individuare relazioni

Corrado prepara catene di triangoli utilizzando delle barrette metalliche.



a) In ogni catena indica con la lettera x il numero di triangoli ed esprimi il numero di barrette metalliche in funzione del numero x di triangoli. In ogni catena il numero di barrette è uguale a:

A $2 + 2x$ **B** $x + 2$ **C** $1 + 2x$ **D** $x + 1$

b) Quante barrette metalliche serviranno per costruire una catena di 12 triangoli?

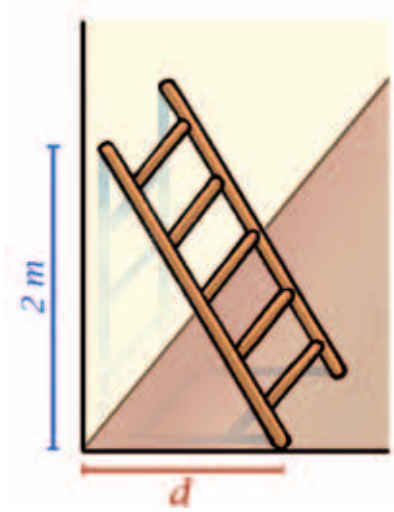
A 20 **B** 24 **C** 22 **D** 25

c) Con 77 barrette metalliche può preparare una catena di quanti triangoli?

A 40 **B** 38 **C** 42 **D** 41

48. Tipologia: Geometria
Abilità: Applicare il teorema di Pitagora

Filippo deve appendere un quadro a un muro. Per poterlo fare deve appoggiare la scala a 2 metri di distanza dal pavimento. A che distanza (d) dal muro deve mettere la scala se essa è lunga 3 metri?



A 1 **B** $\sqrt{7}$ **C** $\sqrt{5}$ **D** $\sqrt{13}$

49. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Risolvere problemi di geometria solida

a) Quanti cilindri alti 6 cm e col raggio di base di 4 cm si possono collocare in una scatola lunga 27 cm, larga 18 cm ed alta 17 cm?

A 12 B 10 C 14 D 15

b) Se la scatola si gira e si appoggia sulla base di dimensioni 17 cm e 27 cm con altezza quindi di 18 cm, quanti cilindri si possono sistemare?

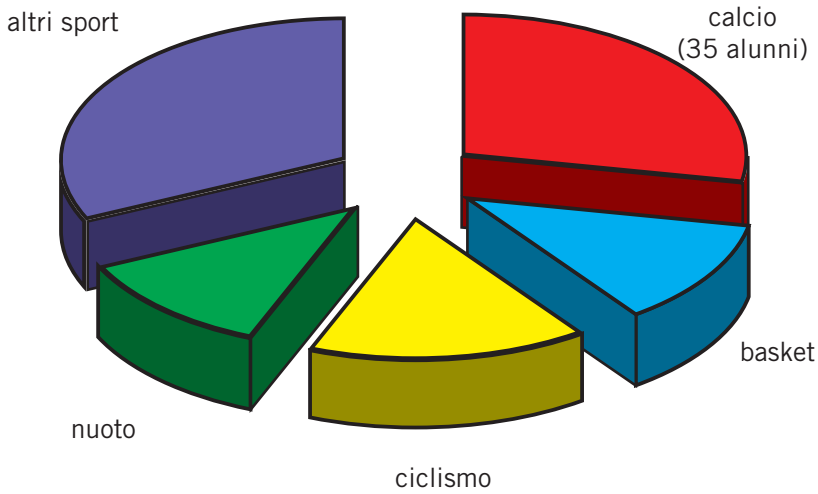
A 12 B 18 C 16 D 14

50. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Risolvere problemi utilizzando percentuali

Da un'indagine effettuata sugli alunni di terza di una scuola secondaria di primo grado sono emersi i dati riportati nella seguente tabella:

Sport praticato	percentuale
calcio	28%
basket	12%
ciclismo	16%
nuoto	12%
altri sport	32%

Osserva il seguente areogramma e rispondi alle domande.



a) Potendo scegliere un solo sport tra quelli indicati, quanti sono gli alunni sui quali è stata effettuata l'indagine?

A 115 B 130 C 125 D 120

b) Quanti sono gli alunni che non praticano il calcio o il ciclismo?

A 75 B 70 C 65 D 60

51. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Calcolare il perimetro

Il lato di un quadrato, il lato di un triangolo equilatero e il raggio di una circonferenza sono lunghi 4 cm. Quale delle tre figure ha il perimetro maggiore? Giustifica la risposta.

A Il quadrato
B Il triangolo equilatero
C La circonferenza

52. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Calcolare la media

Data la serie di numeri 8, 7, 21 quale valore occorre aggiungere alla serie, affinché la media aritmetica della sequenza sia 10?

A 4
B 7
C 2
D 8

53. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Utilizzare il significato di percentuale

Oggi Lucia ha speso il 75% del suo guadagno giornaliero e le rimangono 40 €. Qual è lo stipendio mensile (trenta giorni) di Lucia?

A 160
B 3000
C 260
D 4800

54. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Utilizzare le frazioni

Possiedo 50 gettoni. Un quinto sono gialli, una metà dei rimanenti sono rossi e gli altri sono verdi. Quanti sono i gettoni verdi?

A 25
B 20
C 16
D 5

55. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Confrontare i numeri

Quale tra i seguenti numeri è il minore?

A $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$
B $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$
C $\left(\frac{1}{4}\right)^2$
D $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

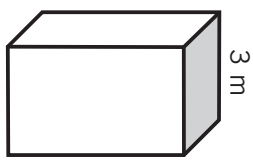
56. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Calcolare il valore di un'incognita

Per quali valori di x l'espressione $-\frac{2-x}{4}$ è positiva?

A Per tutti gli x minori di 2
B Per nessun valore
C Per tutti gli x maggiori di 2
D Per tutti gli x minori di $\frac{1}{2}$

57. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Calcolare aree

Si vuole ricoprire con carta da parati le pareti della stanza rappresentata in figura, i cui spigoli misurano 5 m, 4 m e 3 m. Quanti metri quadrati di carta occorrono?



A 60 m^2
B 70 m^2
C 54 m^2
D 27 m^2

58. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Confrontare numeri

Qual è il numero maggiore?

A $0{,}3^3$ **B** $0{,}3^2$ **C** $0{,}3^4$ **D** $0{,}3$

59. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Individuare la soluzione più conveniente

Luca si informa sul costo di un viaggio di 6 giorni. Ha in mano il seguente preventivo:

Treno + taxi	210 €
Aereo	300 €
Albergo 2	120 € a notte, colazione compresa
Albergo 1	100 € a notte, senza colazione
Colazione	7 € al giorno

Quale soluzione è la più economica?

A Treno + taxi + albergo 1
B Treno + taxi + albergo 2
C Aereo + albergo 1
D Aereo + albergo 2

60. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Utilizzare la media

Alfredo ha fatto una media della spesa per il consumo di energia elettrica in quattro mesi, che risulta essere di 80 € al mese. Se nei primi 3 mesi ha speso complessivamente 50 €, quanto ha speso nel 4° mese?

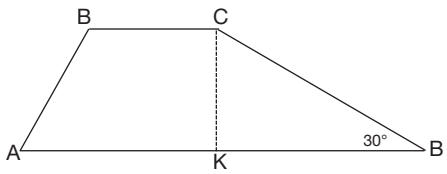
A 150 € **B** 270 € **C** 30 € **D** 130 €

61. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Individuare relazioni geometriche

Un triangolo *ABC* ha i lati lunghi 9 cm, 12 cm, 15 cm, mentre il triangolo *EFG* ha i lati che misurano 13 cm , 14 cm, 15 cm. Quale dei due è rettangolo? Giustifica la risposta.

A Il triangolo *ABC*
B Il triangolo *EFG*
C Entrambi i triangoli
D Nessuno dei due

62. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Individuare relazioni geometriche

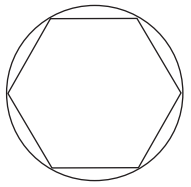


Considera il trapezio della figura: qual è il rapporto tra l'altezza *CK* e il lato *CB*? Giustifica la risposta.

A $CK = \frac{1}{2} CB$ **B** $CK = 2\ CB$ **C** $CK = CB$ **D** $CB = \frac{1}{2} CK$

63. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Individuare relazioni geometriche

Il diametro della circonferenza circoscritta a un esagono misura 24 cm; qual è il perimetro dell'esagono?



A Non ho dati sufficienti B 12 cm C 72 cm D 144 cm

64. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Utilizzare il significato di probabilità

Un sacchetto contiene 10 biglie numerate da 0 a 9. Estraendo una biglia esce un numero pari; quale situazione ha la maggior probabilità di verificarsi?

A Il numero uscito è dispari

B Il numero uscito può essere un multiplo di cinque

C Il numero uscito è un divisore di otto

D Il numero uscito è un multiplo di tre

65. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Utilizzare il significato di volume

Hai a disposizione 70 cubetti tutti uguali. Qual è il dado più grande che riesci a costruire utilizzando il maggior numero di cubetti? Giustifica la risposta.

66. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Individuare relazioni

Considera un parallelepipedo rettangolo di volume 1200 cm^3 e indica con x e y le dimensioni di base; se 12 cm è l'altezza, qual è la relazione che lega le dimensioni al volume?

A $12 = \frac{V}{xy}$ B $x = \frac{12V}{y}$ C $y = \frac{12x}{V}$ D $V = \frac{xy}{12}$

67. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Applicare la proporzionalità

Sapendo che per costruire 100 automobili occorrono 3 mesi e 12 operai, quanti mesi occorreranno per costruire 1000 automobili se gli operai triplicano?

A 20 mesi B 10 mesi C 9 mesi D 12 mesi

68. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Applicare il significato di percentuale

Il costo della benzina in un anno è aumentato dello 0,7%. Se l'anno precedente ho speso 2000 €, quando spendo adesso?

A 2201,4 € B 2007 € C 2014 € D 200,7 €

69. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Utilizzare il significato di multiplo
Avendo a disposizione 40 cartoncini numerati e sapendo che un cartoncino su cinque è contrassegnato con il numero quattro, quanti cartoncini con il numero quattro ci sono nel mazzo?

A 8 B 10 C 5 D 20

70. Tipologia: Numeri
Abilità: Utilizzare le proprietà delle potenze

$[3^4 : (3 \cdot 3)^2]^2 =$

A 3 B 1 C 0 D 3^4

71. Tipologia: Numeri
Abilità: Utilizzare le proprietà numeriche

Dato il numero 1200000000000, quale delle seguenti espressioni ha lo stesso valore?

A $12 \cdot 10^{10}$ B $1{,}2 \cdot 10^{12}$ C $3 \cdot 400000000$ D $0{,}12 \cdot 10^{12}$

72. Tipologia: Numeri
Abilità: Operare con i numeri relativi

Una stazione meteorologica ha registrato le seguenti temperature:

ore	temperatura
6:00	– 6
13:00	+ 7
21:00	+ 4

Quali delle seguenti affermazioni è falsa?

A Alle 13:00 la temperatura è salita di 11 gradi rispetto alle 6:00
B Alle 6:00 c'erano 13 gradi in meno che alle 13:00
C Alle 21:00 si registra una diminuzione di 3 gradi rispetto alle 13:00
D Alle 21:00 si è registrato un aumento di 10 gradi rispetto alle 6:00

73. Tipologia: Numeri
Abilità: Conoscere il M.C.D.

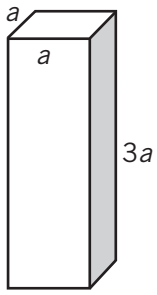
Dati due numeri interi a e b, se a è il successivo di b, qual è il M.C.D. tra i due numeri?

A 1 B $a \cdot b$ C 0 D $b : a$

74. Tipologia: Geometria
Abilità: Individuare relazioni geometriche

In un parallelepipedo i lati misurano rispettivamente a, a e $3a$.
Quanto misura la somma di tutti i suoi lati?

A $12a^2$ B $9a^3$ C $20a$ D $15a$



75. Tipologia: Dati e previsioni
Abilità: Calcolare la media

Durante l'anno scolastico, Luca ha riportato in matematica i seguenti voti:
8, 6, 4, 5, 7. Qual è la sua media?

A 4 B 5 C 6 D 7

76. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Utilizzare proprietà geometriche

Un triangolo rettangolo isoscele ha un angolo di:

A 30° B 45° C 60° D 33°

77. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Utilizzare il teorema di Pitagora

Un rettangolo ha la diagonale che misura $2a$, esattamente il doppio del lato minore. Qual è la misura approssimata dell'altro lato?

A $1{,}4a$ B $1{,}5a$ C $1{,}6a$ D $1{,}7a$

78. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Utilizzare relazioni geometriche

Una torta è stata divisa in 12 fette tutte uguali. Quanto vale l'angolo al centro di ciascuna fetta?

A 60° B 45° C 30° D 15°

79. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Conoscere la relazione tra il numero dei lati e delle diagonali di un poligono regolare

Quante diagonali ha un pentagono regolare?

A 5 B 10 C 15 D 20

80. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Utilizzare proprietà numeriche

Quale dei seguenti numeri è, nell'insieme dei numeri naturali, un quadrato perfetto?

A 36 B 40 C 44 D 48

81. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Applicare il significato di percentuale

Gli alunni (maschi) della 3ª B sono 15 e rappresentano il 60% della classe. Quanti sono in totale gli alunni di quella classe?

A 20 B 22 C 25 D 30

82. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Individuare la soluzione di una situazione problematica

Una lavatrice assorbe una potenza di 2000 Watt, il frigorifero una potenza di 470 Watt e il contatore interrompe l'erogazione di corrente quando si superano, anche di poco, i 3000 Watt. Quante lampadine da 60 Watt possono stare accese mentre i due elettrodomestici funzionano?

A 5 B 8 C 10 D 6

83. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Utilizzare le proprietà numeriche

Quale dei seguenti numeri è un numero periodico?

A $\frac{1}{3}$ B $\sqrt{2}$ C π D 0

84. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Calcolare il valore di un'incognita

Qual è la soluzione dell'equazione: $\frac{1}{100}+\frac{1}{x}=\frac{1}{50}$?

A $x = 50$ B $x = 100$ C $x = 2$ D $x = 200$

85. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Utilizzare relazioni geometriche

Se le diagonali di un rombo sono uguali, allora:

A Il rombo è un quadrato
B Il rombo è isoscele
C Il rombo è equilatero
D Non possiamo dire nulla riguardo al rombo

86. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Calcolare la probabilità

Lanciando una moneta in aria, al primo lancio esce testa, al secondo testa; al terzo lancio la probabilità che esca testa è del:

A 100% B 50% C 66,6% D 33,3%

87. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Calcolare la probabilità

I dadi sono dei cubi le cui sei facce sono numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità di ottenere 7 lanciando due dadi?

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{12}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{18}$

88. **Tipologia:** Dati e previsioni
Abilità: Calcolare la probabilità

I dadi sono dei cubi le cui sei facce sono numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità di ottenere 12 lanciando due dadi?

A $\frac{1}{12}$ B $\frac{1}{18}$ C $\frac{1}{24}$ D $\frac{1}{36}$

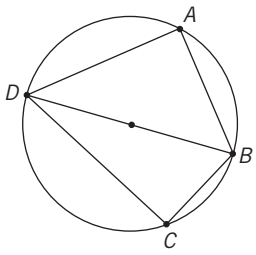
89. **Tipologia:** Numeri
Abilità: Individuare le soluzioni di un'equazione

Quali sono le soluzioni dell'equazione: $x^2 - x = 0$?

A $x = 2$ B $x = 1; x = 0$ C $x = 1; x = -1$ D $x = -1; x = 0$

90. **Tipologia:** Geometria
Abilità: Utilizzare proprietà geometriche

Osserva la figura: che cosa puoi dire degli angoli $D\hat{A}B$ e $B\hat{C}D$
Giustifica la risposta.



Soluzioni

1. 10 gialle, 60 rosse, 20 blu; sesta sequenza

2. B

3. C

4. D

5. 15%

6. B

7. B

8. A

9. C

10. D

11. C

12. B

13. D

14. A

15. D

16. C

17. D

18. B

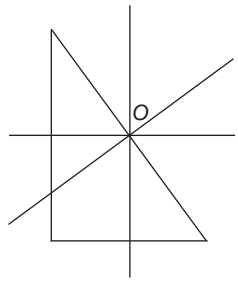
19. B

20. D

21. C

22. A

23.



24. $(2^3)^3 : 2^3$

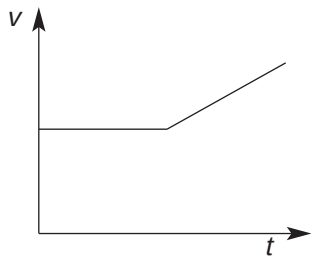
25. a) B; C

b) $AP = AD : 2$

c) sì; per il primo criterio di congruenza oppure per il terzo

26. C

27.



28. D

29. 8 modelli grandi + 1 modello piccolo

oppure 5 grandi + 6 piccoli

oppure 2 grandi e 11 piccoli.

30. a) D

b) C

31. $1 + 13 \cdot 5 - 4 \cdot 7$

32. B

33. B

34. D

35. C

36. D

37. a) D

b) Media $= \frac{4\cdot5+5\cdot8+6\cdot7+7\cdot2+8\cdot2}{24} =$

$\frac{132}{24} = 5{,}5$

38. A

39. C

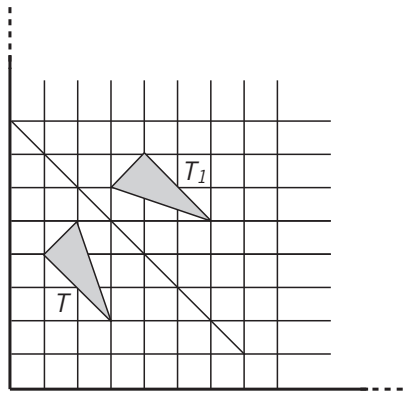
40. D

41. a) D

b) B

42. D

43.



44. B

45. B

46. a) B

b) D

47. a) C

b) D

c) B

48. C

49. a) A

b) B

50. a) C

b) B

51. C

52. A

53. D

54. B

55. D

56. C

57. C

58. D

59. A

60. B

61. A, perché le misure dei lati formano una terna pitagorica

62. A

63. C

64. C

65. Il dado formato da 64 cubetti, di spigolo 4

66. A

67. B

68. C

69. A

70. B

71. B

72. A

73. A

74. C

75. C

76. B

77. D

78. C

79. A

80. A

81. C

82. B

83. A

84. B

85. A

86. B

87. A

88. D

89. B

90. Sono retti perché i triangoli *DAB* e *BCD* sono rettangoli, essendo inscritti in una circonferenza e avendo i lati maggiori coincidenti con il diametro.

Indice

pag.

1. Numeri relativi 3
2. Il calcolo letterale 13
3. Equazioni 33
4. Funzioni matematiche e piano cartesiano 43
5. Le misure di cerchio, circonferenza e loro parti 53
6. Le tre dimensioni, il volume e il peso specifico 57
7. Poliedri, prismi e piramidi 65
8. Solidi di rotazione 81

LABORATORIO DI MATEMATICA

1. Uso delle bilance per esprimere situazioni problematiche 89

SCHEDE STORICHE E CURIOSITÀ

1. Archimede: sfera e cilindro 97
2. Il metodo di Eratostene 97
3. π è un numero irrazionale? 98
4. Leonhard Euler 98
5. La tormentata storia dei numeri col segno 98
6. Curiosità sui segni + - · : e linea di frazione 99
7. Il papiro di Rhind 99
8. Equazioni 100
9. Il gioco della zara 100

PER PREPARARTI ALLA PROVA NAZIONALE 101