Elevamento a potenza

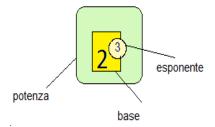
L'elevamento a potenza

Come la moltiplicazione può essere vista come abbreviazione di un'addizione tra addendi uguali, così è possibile scrivere in maniera concisa una moltiplicazione tra fattori tutti uguali.

$$2 + 2 + 2 = 2 \cdot 3 = 6$$

 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Per abbreviare le moltiplicazioni tra fattori uguali tra di loro, si scrive questo fattore, che assume il nome di **base**, una sola volta e si pone alla sua a destra, in alto e in piccolo, l'indicazione di quanti sono i fattori. Questo numero, rappresentato come apice a destra della base, è denominato **esponente**. L'operazione è detta **elevamento a potenza** e il suo risultato è detto **potenza**.



L'elevamento a potenza è un'operazione che associa a due numeri qualsiasi, dati in un dato ordine e detti base ed esponente, un terzo numero, detto potenza, che si ottiene moltiplicando la base per se stessa tante volte quando indica l'esponente.

Il calcolo della potenza di un numero (base) si esegue, quindi, come prodotto di tanti fattori uguali alla base quanti ne indica l'esponente. In generale:

$$a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ volte}}$$

Le potenze scritte nella forma a^n si leggono come "<u>elevato alla n</u>" o più semplicemente "<u>alla n</u>".

Matematica e tecnologia Nei fogli di calcolo e nei linguaggi di programmazione per le potenze si usa il simbolo ^ o **.

Alcuni esponenti hanno un nome particolare. L'esponente due è indicato come al quadrato (un numero alla seconda rappresenta l'area di un quadrato che abbia per lato quel valore) e l'esponente tre come al cubo (un numero alla terza rappresenta il volume di un cubo che abbia per spigolo quel valore). Presta attenzione a non confondere il quadrato di un numero con il suo doppio e il cubo con il suo triplo.

Esempi

	si legge	oppure
$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$	tre alla seconda	tre al quadrato
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$	due alla terza	due al cubo
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$	tre alla quarta	tre elevato alla quarta

Con a e n numeri naturali, l'elevamento a potenza è un'operazione interna all'insieme dei numeri naturali (N), discendendo dall'operazione di moltiplicazione. L'insieme dei numeri naturali (N) è chiuso rispetto all'elevamento a potenza.

Il base può essere un numero intero, razionale o reale mentre l'esponente è un numero intero positivo.

Con il termine **tetrazione**, noto anche come hyper-4, ci si riferisce ad una potenza reiterate di una serie di esponenti.

$$2^{2^{2^2}} = 2^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 256$$

Questa operazione pur consentendo la scrittura di numeri molto grandi non trova applicazioni pratiche. Matematica e storia Il matematico francese Nicolas Chuquet (Paris, 1445 – Lyon, 1488) inventò una propria forma di notazione per i concetti algebrici e le potenze e attribuì un nome ai grandi numeri.

Potenze particolari.

I seguenti sono una serie di casi particolari dell'elevamento a potenza. La giustificazione di alcuni di essi richiede altre conoscenze e sarà successiva.

Qualsiasi potenza con esponente 1 è la base. $a^1 = a$

Ricorda che se $a^1=a$, allora $a=a^1$.

Esempio: $2^1 = 2$ $3^1 = 3$ $4^1 = 4$

Qualsiasi potenza con base 1 è 1.

 $1^n = 1$

Esempio: $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Qualsiasi potenza con base 0 ed esponente maggiore di 0 è 0. $O^n = O(\forall n > 0)$

 $0^n = 0 \ (\forall n > 0)$

Esempio: $0^2 = 0.0 = 0$ $0^3 = 0.0.0 = 0$ $0^4 = 0.0.0.0 = 0$

Qualsiasi potenza con esponente 0 è pari a 1. $a^0 = 1 \ (\forall a \neq 0)$

Esempio: $1^0 = 1$ $2^0 = 1$ $13^0 = 1$

Le potenze di 10 si ottengono scrivendo dopo l'unità tanti zeri quanti ne indica l'esponente.

 $10^n = 1 \underbrace{0 \dots}_{n \text{ wolte}}$

Esempio: $10^1 = 1$ $10^2 = 100$ $10^3 = 1000$

La potenza 0º è priva di significato.

Alcuni autori pongono $0^0=1$.

Proprietà delle potenze

L'elevamento a potenza gode di proprietà la cui conoscenza, come per quelle delle operazioni fondamentali, ne semplifica il calcolo o lo abbrevia.

Prodotto di potenze con la stessa base

Dall'esempio seguente si può dedurre una proprietà generale per il prodotto di potenza di uquale base.

$$2^{3} \cdot 2^{4} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ volte}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ volte}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{7 \text{ volte}} = 2^{7}$$

Il prodotto di potenze aventi la stessa base é una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Esempio:
$$3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6 \operatorname{perch\'e} 3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^6$$

Quoziente di potenze con la stessa base

Dall'esempio seguente si può dedurre una proprietà generale.

$$2^{6}: 2^{3} = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{6 \text{ volte}}: \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3 \text{ volte}} = 2^{3}$$
 (2:2) = 1

Il quoziente di potenze aventi la stessa base é una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

Esempio:
$$3^4: 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 perché 3^4: 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3): (3 \cdot 3) = 3^2$$

Potenza di una potenza

Dall'esempio seguente, dove è applicata la definizione di elevamento a potenza, si può dedurre una proprietà generale per una potenza a sua volta elevata a un dato esponente e detta potenza di una potenza.

$$(2^3)^2 = \left(\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ volte}}\right)^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ volte}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ volte}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6 \text{ volte}} = 2^6$$

La potenza di una potenza é una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Esempio:
$$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6 \operatorname{perché}(5 \cdot 5)^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5^6$$

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

In questo caso, dall'esempio, si deduce come la moltiplicazione di potenze con lo stesso esponente porti allo stesso risultato se si esegue prima il prodotto delle basi e poi se esegua l'elevamento a potenza. Si può sfruttare anche la proprietà commutativa della moltiplicazione per mostrarne la validità.

$$3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = (3 \cdot 2)^2 = 6^2$$

Il prodotto di potenze con lo stesso esponente é una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi.

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

Esempio:
$$2^3 \cdot 5^3 = (2.5)^3 = 10^3 \text{ perch\'e } 2^3 \cdot 5^3 = (2.2.2) \cdot (5.5.5) = 10.10.10 = 10^3$$

Quoziente di potenze con lo stesso esponente

In questo caso, dall'esempio, si deduce come la divisione di potenze con lo stesso esponente porti allo stesso risultato se si esegue prima il quoziente delle basi e poi se esegua l'elevamento a potenza. Si può sfruttare anche la proprietà invariantiva della divisione per mostrarne la validità.

$$12^2: 4^2 = 144:16 = 9$$

 $12^2: 4^2 = (12\cdot12):(4\cdot4) = [(12:4)\cdot(12:4)]:[(4:4)\cdot(4:4)] = 3\cdot3 = 3^2$

Il quoziente di potenze con lo stesso esponente é una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi.

$$a^x \div b^x = (a \div b)^x$$

Esempio:
$$6^2: 3^2 = (6:3)^2 = 2^2 \operatorname{perch\'e} 6^2: 3^2 = \frac{6^2 \cdot 6}{3 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 4$$

Quoziente di potenze con esponente zero

La proprietà del quoziente di potenze con lo stesso esponente che prevede la differenza degli esponenti quale abbreviazione del calcolo, è utile a comprendere il significato delle potenze che abbiano una base diversa da zero e l'esponente zero. In questi casi la potenza vale sempre 1.

$$a^0 = 1 \ (\forall a \neq 0)$$

$$5^2: 5^2 = 25:25 = 1$$

 $5^2: 5^2 = 5^{2-2} = 5^0 = 1$

Facendo ricorso alla legge di Hankel si giunge allo stesso risultato. Il principio di permanenza delle regole del calcolo stabilisce, infatti, che se in matematica si vuole generalizzare un concetto oltre la sua originaria definizione, bisogna scegliere, tra tutti i modi possibili, quello che permette di conservare immutate le regole del calcolo nel più esteso numero dei casi.

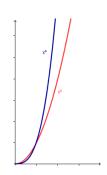
Matematica e storia
Herman Hankel (Halle, 14/2/1839 –
Schramberg, 20/8/1873),
matematico tedesco, fu
tra i primi ad attribuire
ad attribuire all'India le
origine del nostro
sistema di numerazione.

it.wikipedia.org/wiki/Hermann Hankel

Funzione esponenziale.

E' possibile rappresentare graficamente le funzioni esponenziali $y=a^x$ su di un piano cartesiano.

Riportando le coppie di punti (x, a^x) si ottengono delle curve sempre più ripide quanto maggiore è il valore di x. Per ottenere i punti della curva puoi utilizzare la tavole numeriche e i valori dei quadrati e dei cubi dei primi numeri.



Matematica e scienze In biologia i microorganismi hanno una crescita esponenziale in presenza di cibo sufficiente. Un primo organismo si divide in due, questi a loro volta divengono quattro e così via.

Potenze del 10.

Particolare importanza assumono le potenze del numero 10, permettendo di semplificare la scrittura di numeri molto grandi e molto piccoli.

Tradurre una potenza di dieci in numero è semplice.

Si può verificare che il numero delle unità di ogni esponente è uguale al numero di zeri del risultato.

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1.000$$

L'esponente zero della prima potenza di dieci è pari all'unità $(10^0=1)$.

Per le potenze di dieci con esponente negativo, il numero delle unità di ogni esponente indica il numero di zeri che precedono l'unità.

$$10^{-1} = 0.1$$

$$10^{-2} = 0.01$$

$$10^{-3} = 0.001$$

I numeri di un qualsiasi sistema di numerazione possono essere scritti quindi in **forma polinomiale** usando le potenze della base.

Nel sistema decimale la base è 10 e si usano potenze del 10.

Occorre seguire la convenzione secondo la quale le cifre decimali, poste a destra della virgola, sono scritte con esponente negativo pari alla posizione occupata dopo la virgola.

$$2.325 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$$

$$2.325 = 2 \cdot 10^{3} + 3 \cdot 10^{2} + 2 \cdot 10^{1} + 5 \cdot 10^{0}$$

$$21,607 = 2 \cdot 100 + 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{1000}$$

$$21.607 = 2 \cdot 10^{1} + 1 \cdot 10^{0} + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-3}$$

Alcune potenze del 10 sono utilizzate come prefissi del sistema internazionale di misura (SI = International System of Units). I prefissi assumono nomi particolari.

Sono di seguito riportati i nomi assunte dalle potenze di 10 che costituiscono prefisso internazionale e la data di adozione nel sistema.

Nome	simbolo	fattore		Introdotto nel SI il
yotta	Y	10^{24}	1.000.000.000.000.000.000.000.000	1991
zetta	Z	10^{21}	1.000.000.000.000.000.000	1991
exa	E	10^{18}	1.000.000.000.000.000	1991
peta	P	10^{15}	1.000.000.000.000.000 (un milione di miliardi)	1975 CGMP (*)
tera-	T	10^{12}	1.000.000.000.000	1960 confermato
giga-	G	10^{9}	1.000.000.000 (un miliardo)	1960 confermato
mega-	M	10^{6}	1.000.000	1960 confermato
chilo- kilo-	k	10^{3}	1.000	1975 CGMP
etto-	h	10^{2}	100	1975 CGMP
deca-	da	10 ¹	10	1975 CGMP
unità-		10^{0}	1	
deci-	d	10 ⁻¹	0,1 (1/10)	1975 CGMP
centi-	c	10 ⁻²	0,01 (1/100)	1975 CGMP
milli-	m	10 ⁻³	0,001 (1/1.000)	1975 CGMP
micro-	μ	10 ⁻⁶	0,000.001 (1/1.000.000)	1960 confermato
nano-	n	10-9	0,000.000.001 (un miliardesimo) (1/1.000.000.000)	1960 confermato
pico-	р	10 ⁻¹²	0,000.000.000.001	1960 confermato
femto-	f	10 ⁻¹⁵	0,000.000.000.000.001(un milionesimo di miliardesimo)	1964
atto-	a	10 ⁻¹⁸	0,000.000.000.000.001	1964
zepto	Z	10 ⁻²¹	0,000.000.000.000.000.001	1991
yocto	y	10 ⁻²⁴	0,000.000.000.000.000.000.000.001	1991

(*) CGMP: General Conference of Weights and Measures

Ci sono altre potenze del 10 con attribuito un nome e che non sono usate dal SI come prefissi.

Nome	simbolo	fattore	
googolplex		$10^{10^{100}}$	
googol		10^{100}	
miria	ma	10^{4}	10.000
Angstrom	Å	10^{-10}	0,000.000.000.1

Sono potenze del dieci, non standard nel SI, la potenza quarta che prende il nome di miria e la potenza con esponente 100 che assume il nome di Googol e il Googolplex.

Matematica e storia Il nome Googol è attribuito al matematico americano Edward Kasner (2/4/1878 – 7/1/1955). Il motore di ricerca Google usa una distorsione di questa potenza particolare del 10.

Approfondimenti: it.wikipedia.org/wiki/Sistema internazionale

Notazione esponenziale e forma standard.

La notazione scientifica o notazione esponenziale è usata per esprimere in modo conciso numeri molto grandi o molto piccoli come prodotti di un coefficiente h per una potenza, positiva o negativa, di $10 \ (h \cdot 10^{\pm n})$. Questo tipo di notazione, usata in fisica e chimica ad esempio, consente di esprimere diverse grandezze senza utilizzare lunghe sequenze di zeri e consente di evitare ambiguità linguistiche che differenziano diversi paesi che attribuiscono alla stessa parola valori diversi (es. bilione europeo 10^9 contro 10^{12} in USA).

Per convenzione, il numero h deve essere costituito da una sola cifra intera seguita da una o più cifre decimali.

Un numero nel formato nel formato $h\cdot 10^{\pm n}$ è rappresentato nel formato scientifico o in notazione esponenziale.

Il numero 123.000.000 può essere rappresentato nella notazione scientifica come $1,23\cdot10^8$, mentre il numero 0,0123 può essere rappresentato come $1,23\cdot10^{-2}$.

E' questa la notazione impiegata anche dalle calcolatrici o dai fogli di calcolo per rappresentare valori che non rientrano per esteso sul visore o nelle celle.

Sono parimenti valide, ma non convenzionali, le seguenti scritture:

 $123.000.000 = 12,30 \cdot 10^{7}$ $123.000.000 = 123,00 \cdot 10^{6}$ $0,0123 = 0,123 \cdot 10^{-1}$

Per scrivere un numero in formato scientifico si sposta la virgola a sinistra, se il numero è grande, o a destra, se il numero è piccolo, fino a trovare un numero \boldsymbol{h} inferiore a 10. Il numero degli spostamenti è l'esponente $+\boldsymbol{n}$ o $-\boldsymbol{n}$ di 10 da utilizzare nel formato $\boldsymbol{h} \cdot \mathbf{10}^{\pm n}$.

Per trasformare un numero dal formato scientifico nel valore decimale corrispondente si segue la regola inversa.

Ordine di grandezza di un numero.

I numeri naturali che abbiano come ultime cifre degli zeri possono essere scritti come prodotto delle restanti cifre per una potenza di 10 che abbia come esponente il numero di zeri che aveva il numero.

```
2.000 = 2 \times 10^3
```

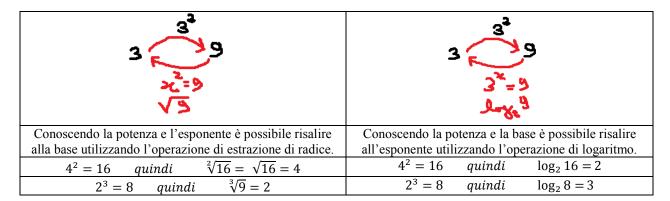
Ogni numero naturale è, inoltre, compreso tra due potenze di dieci contigue. $10^3 < 2.000 < 10^4$. In questo caso la potenza più vicina al numero dato è 10^3 . $10^3 < 7.000 < 10^4$. In questo caso la potenza più vicina al numero dato è 10^4 .

Si definisce ordine di grandezza di un numero la potenza di 10 che più si avvicina a quel numero.

È quindi introdotta una approssimazione ma questa serve per avere proprio un'idea o ordine di grandezza con cui operare.

Operazioni inverse dell'elevamento a potenza.

L'elevamento a potenza ha due operazioni inverse secondo che si cerchi la base noti la potenze e l'esponente o che si ricerchi l'esponente noti la potenza e la base.



Estrazione di radice

E' detta radice aritmetica ennesima (di indice n) di un numero reale a, un secondo numero reale (se esiste), b, tale che la potenza ennesima di questo sia uguale ad a.

L'estrazione di radice si scrive $\sqrt[n]{a} = b$; scrittura che equivale alla potenza $b^n = a$.

Il numero a che compare sotto il segno di radice è detto **radicando**.

Il numero n, omesso per il valore 2, è detto indice della **radice**.

La radice con indice 2 prende il nome di **radice quadrata**.

La radice con indice 3 prende il nome di **radice cubica**.

Esempio:
$$2^3 = 8$$
 $x^3 = 8$ $da \ dove$ $\sqrt[3]{8} = 2$

L'operazione di estrazione radice non è interna a N! L'insieme dei numeri naturali (N) non è chiuso rispetto all'estrazione di radice (I).

Logaritmo

Dicesi logaritmo di un numero, in una data base, l'esponente cui si deve elevare la base per ottenere il numero dato.

Se fra tre numeri a>1, b>0 e x intercede una relazione esponenziale del tipo $a^x = b$ **x** è **detto logaritmo in base a di b**, e si scrive: $log_a b = x$

Esempio:
$$2^3 = 8$$
 $2^x = 8$ da dove $log_2 8 = 3$

L'operazione di logaritmo non è interna a N! L'insieme dei numeri naturali (N) non è chiuso rispetto al logaritmo. Matematica e storia I logaritmi furono proposti nel 1614 da John Napier (Merchiston Castle, 1550 – Edimburgo, 4/4/1617), matematico, astronomo e fisico scozzese.

Espressioni con le potenze.

Un'espressione aritmetica può prevedere l'operazione di elevamento a potenza.

In questo caso prima di eseguire qualsiasi altra operazione si svolgono le potenze. Nelle espressioni si conviene di utilizzare, sempre e dove possibile, le proprietà delle potenze e di mantenere la notazione con l'esponente sino a che non si è certi che non vi sono proprietà applicabili.

Si prosegue il calcolo con le regole che conosci e nel rispetto delle eventuali parentesi.

L'esempio che segue riporta un'espressione aritmetica con le potenze da svolgere prima di tutte le altre operazioni. Non vi sono casi in cui serva applicare le proprietà delle potenze.

$$(2^{3} + 2^{2} \cdot 5 - 3^{0} \cdot 2^{3} + 1) : (7^{2} - 42) =$$
 $= (8 + 4 \cdot 5 - 1 \cdot 8 + 1) : (49 - 42) =$
 $= (8 + 20 - 8 + 1) : 7 =$
 $= (28 - 8 + 1) : 7 =$
 $= (20 + 1) : 7 =$
 $= 21 : 7 = [3]$

Nell'esempio seguente si utilizzando le proprietà delle potenze, sino quasi al termine dello svolgimento, con indubbi benefici per il calcolo.

$$(3^{2} \cdot 3^{5} \cdot 3^{3}) : (3^{3} \cdot 3)^{2} =$$
 $= (3^{2+5+3}) : (3^{3+1})^{2} =$
 $= 3^{10} : (3^{4})^{2} =$
 $= 3^{10} : 3^{4\cdot 2} =$
 $= 3^{10} : 3^{8} =$
 $= 3^{10-8} = 3^{2} = [9]$

In questo secondo esempio si presentano casi diversi. Si applicano dove possibile le proprietà e negli altri casi si eseguono prima le potenze del resto.

```
{2+(3\cdot5^2-2^2\cdot3^2-3):[5\cdot(2^6:2^4\cdot3-5^4:5^3\cdot2)-2^5:2^2]}:[2\cdot(5^2:5)]=
=\{2+(3\cdot25-4\cdot9-3):[5\cdot(2^{6-4}\cdot3-5^{4-3}\cdot2)-2^{5-2}]\}:[2\cdot5^{2-1}]=
=\{2+(75-36-3):[5\cdot(12-10)-8]\}:10=
=\{2+(39-3):[5\cdot2-8]\}:10=
=\{2+36:[10-8]\}:10=
=\{2+36:2\}:10=
=\{2+18\}:10=
=\{2+18\}:10=
```

Potenze con esponente negativo.

Compaiono nei calcoli anche potenze con esponente negativo. Questa occorrenza può già essere resa comprensibile utilizzando le conoscenze delle proprietà delle operazioni e delle potenze.

Dovendo eseguire $(2^2:2^3)$, potremmo applicare le proprietà del quoziente di potenze con la stessa base.

$$2^2: 2^3 = 2^{2-3} = 2^{-1}$$

Dovendo eseguire $(2^2:2^3)$ potremmo, in alternativa, applicare la proprietà invariantiva della divisione nel seguente modo.

$$2^2: 2^3 = 4: 8 = 2: 4 = 1: 2 = \frac{1}{2} = 0.5$$
 da cui $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

Si tratta quindi di una convenzione di scrittura che già hai visto per le potenze del 10.

Per le potenze di dieci con esponente negativo, il numero delle unità di ogni esponente indica il numero di zeri che precedono l'unità.

$$10^{-1} = 1: 10 = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = 1: 10^{2} = 1: 100 = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$10^{-3} = 1: 10^{3} = 1: 1000 = \frac{1}{1000} = 0.001$$

Potenze con esponente negativo e base diversa da zero sono pari a una potenza che ha come base l'inverso della base e come esponente lo stesso esponente ma positivo.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Esempi

$$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$